

**Nukleonenstreuung an Ein-Loch-Kernen im Rahmen
der Kontinuums-RPA**

Berechnungen zu den Reaktionen $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ und $^{15}\text{N}(n,\bar{n})^{15}\text{N}$

Schah Mahmud Abdi

1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554611_0073

Nukleonenstreuung an Ein-Loch-Kernen im Rahmen

der Kontinuums-RPA

Berechnungen zu den Reaktionen $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ und $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

des Fachbereiches Physik

der Ludwig-Maximilians Universität München

vorgelegt von

Schah Mahmud Abdi

aus Afghanistan

München

1978

1. Referent: Prof. Dr. M. Weigel

2. Referent: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 3. 1979



Abstract

It is shown that the scattering transition amplitude for nucleon-nucleus scattering on one-hole nuclei can be directly related to so-called linear response function. The theory of the linear response function is formulated in the framework of Greens functions. The linear response function obeys an equation of Bethe-Salpeter-type. From the spectral decomposition of the response function one can deduce, that the knowledge of the response function is equivalent to the knowledge of the so-called "particle-hole"- and "hole-particle"-amplitudes (The latter are due to the inclusion of ground-state correlations), respectively, and the excitation energies of the compound A-particle system. The solution of the combined "scattering"- and "bound"-state problem is performed in two steps: a) First, the Random-Phase problem (RPA) is solved by neglecting single particle states from the continuum. In such a traditional model RPA-treatment -the so-called nuclear-structure calculation-, one obtains only the excitation energies without widths and the "p-h"("h-p")-amplitudes with s.p.-bound state quantum numbers.

b) In the second step, the s.p.-states from the continuum have been included into the treatment, which renders the problem much more complicated. In mathematical terms, one has now to deal with a integral-equation system instead of a simple matrix eigenvalue problem. In our treatment we reformulated the original problem in such a way, that the former nuclear

structure calculation can be used directly as an input.

The advantage of the method can be described as follows: One sees directly the effect of the continuum, since due to the new s.p.-states from the continuum one obtains a shift in the excitation energies below the threshold, so testing directly the validity of the standard structure calculations. For energies of the compound system above threshold the (original) real excitation energies move into the complex energy plane, so obtaining the real and imaginary part (width) of the resonance energy. In the actual calculation the coupling to the continuum was done utilizing a sum of separable forces. This ansatz for the force reduces the coupled integral-equation system to much simpler dispersion relations for the (complex) energies. The resonance part of the T-matrix can be expressed analytically by the outcome of the nuclear structure problem, the energies and certain "p-h"-amplitudes.

In this work the binding- and resonance energies for ^{16}O and ^{16}N , respectively, have been calculated, which are needed for the scattering processes $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ and $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$, respectively. For low energies the agreement with experiment is not satisfactory, probably due to the coupling to 3p-3h-states, which was neglected in the treatment.

The reaction $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ (total cross section) is described in good agreement with experiment. For the partial cross sections we obtain essentially the same results as Hanna (Han69).

An improvement of the results is expected by the coupling with 3p-3h-states, the use of self-consistent single-particle energies and the corresponding wave functions.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Formulierung des Vielkörperproblems mit Greenfunktionen haben wir eine Bethe-Salpeter-Gleichung für die renormierte lineare Antwortfunktion, deren Pole die Anregungsenergien des A-Teilchensystems liefern, hergeleitet. Dann wurde ein direkter Zusammenhang zwischen der renormierten linearen Antwortfunktion und dem Problem der Streuung eines Nukleons an einen Ein-Loch-Kern hergestellt. Dadurch wurde das Streuproblem auf die Berechnung der renormierten linearen Antwortfunktion zurückgeführt, die ihrerseits die Kenntnis aller Teilchen-Loch-Amplituden und aller Anregungsenergien des A-Teilchensystems voraussetzt. Im Gegensatz zu den bisher gebräuchlichen Methoden wurden die Amplituden und die Energien in zwei Schritten berechnet. Im ersten Schritt wurden die Standard-RPA-Gleichungen gelöst (Strukturrechnung) und anschließend die Ergebnisse dieser Rechnung zur Lösung der RPA-Gleichungen mit Kontinuum verwendet. Durch den Einschluß des Kontinuums wurden ein Teil der aus der Strukturrechnung erhaltenen reellen Energien in die Komplexe Energieebene verschoben und als Resonanzen interpretiert.

Durch den separablen Ansatz für die Kraft im Kontinuum ergab sich eine Dispersionsrelation, aus der wir Bindungs- und Resonanz-Energien des Systems berechneten. In dieser Arbeit wurden die Bindungs- und Resonanz-Energien von ^{16}O ausgehend von der Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ und die Bindungs- und Resonanz-Energien von ^{16}N ausgehend von dem Streuprozeß $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ berechnet. Es zeigte sich, daß für die niedrig liegenden $\bar{1}$ -, $\bar{2}$ - und $\bar{3}$ -Niveaus

von ^{16}O , ebenso wie mit der Theorie der gekoppelten Kanäle, die Hanna (Han69) für diesen Fall durchgerechnet hat, keine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment zu erreichen ist. Es wurde vermutet, daß der Grund hierfür die starke Beimischung von $3p\text{-}3h$ -Zuständen ist. Die übrigen berechneten Niveaus von ^{16}O und die Ergebnisse von ^{16}N sind in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment.

Ferner konnte der Resonanzanteil der T-Matrix für die Streuung eines Nukleons an einen Einlochkern bis auf bekannte Faktoren durch spezielle Teilchen-Loch-Amplituden ausgedrückt werden. Für diese konnten analytische Ausdrücke hergeleitet werden. Damit wurden die partiellen und totalen Wirkungsquerschnitte für die oben erwähnten Reaktionen berechnet. Für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ war der berechnete totale Wirkungsquerschnitt in guter Übereinstimmung mit experimentellen Angaben. Für die partiellen Wirkungsquerschnitte erhielten wir im wesentlichen dieselben Ergebnisse wie Hanna (Han69) im Rahmen der Feshbachschen Theorie .

Eine Verbesserung der Ergebnisse erwarten wir vor allem durch Hinzunahme der niedrigliegenden $3p\text{-}3h$ -Zuständen, Herabsetzen der Reaktionsschwelle und die Verwendung selbstkonsistenter Hartree-Fock-Wellenfunktionen an Stelle der aus einem phänomenologischen Einteilchenpotential berechneten Wellenfunktionen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Einleitung und Übersicht	1
B. Vielfermionentheorie mit feldtheoretischen Methoden	5
B1. Allgemeine Theorie der Anregungen eines Vielnukleonensystems	5
B2. Funktionalmethoden	9
B3. Fouriertransformation, Spektraldarstellungen und Näherungen	13
C. Nukleonenstreuung an Ein-Loch-Kernen	21
C1. Formulierung des Streuproblems	21
C2. Herleitung der vollen RPA-Gleichungen aus der Bethe-Salpeter-Gleichung	26
C3. Die konventionellen RPA-Gleichungen	29
C4. Allgemeine Eigenschaften der konventionellen RPA-Gleichungen	31
C5. Erweiterung der konventionellen RPA durch Hinzunahme des Kontinuums	33
C6. Explizite Berechnung der T-Matrix	41
D. Vereinfachung der Modellgleichungen durch Symmetriebetrachtungen	45
D1. Symmetriebetrachtungen	45

	Seite
D2. Die Wahl der Restwechselwirkung	49
D3. Vereinfachung der konventionellen RPA-Gleichungen durch Symmetriebetrachtungen	51
D4. Vereinfachung der Energie- dispersionsrelation durch Symmetriebetrachtungen	53
D5. Die reduzierte T-Matrix und der integrierte Wirkungs- querschnitt	60
E. Einteilchenmodellbasis und die Kernparameter	63
E1. Wahl der Wechselwirkung für die Einteilchenmodellbasis	63
E2. Die verwendeten Kernparameter	66
E3. Lösungsmethoden	67
F. Ergebnisse und Diskussion	70
F1. Die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$	71
F2. Die Reaktion $^{15}\text{N}(n,n')^{15}\text{N}$	76
I. Anhang	78
Tabellen	82
Abbildungen	85
Literaturverzeichnis	93

A. Einleitung und Übersicht

Die mikroskopische Beschreibung der Streuung eines Nukleons an einem Atomkern stellt ein kompliziertes Vielkörperproblem dar, dessen exakte Lösung weder analytisch noch numerisch möglich ist. Unter den Theorien, die eine genäherte Behandlung des Problems gestatten, haben sich bis jetzt die von Feshbach entwickelte Methode der gekoppelten Kanäle (Fes58, Fes62, Mot33, Tam65, Gle67) und Rechnungen im Rahmen des Schalenmodells mit Restwechselwirkung bewährt. In diesem Falle hat man das Kontinuum der Einteilchenzustände in die Theorie einzubeziehen (Lem64, Mac64, Mac67, Ber67, Gar67, Bal65, Blo66, Wei66, Glö67, Hüf68, Dan66, Ebe67, Kim73).

Die Formulierung der Theorie mit feldtheoretischen Methoden erweist sich dabei als vorteilhaft. In dieser Formulierung gelingt es, die Berechnung der T-Matrix der Nukleon-Kern-Streuung auf die Bestimmung effektiver Vertizes zurückzuführen, die man als effektive Streuamplituden interpretieren kann und die ähnlichen Gleichungen wie die Streuamplituden selbst genügen. Als wichtiges Hilfsmittel werden dabei die Greenschen Funktionen eingeführt, die Grundzustandserwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren darstellen. Mit Hilfe spezieller Greenfunktionen kann man die lineare Antwortfunktion ausdrücken, die einer Bethe-Salpeter-Gleichung genügt. Eine geeignete Näherung dieser Gleichung führt auf die Gleichungen der RPA-Theorie, die für das Streuproblem ein gekoppeltes Integralgleichungssystem darstellen. Vernachlässigt man die Einteilchenzustände des

Kontinuums, so erhält man in einem endlichdimensionalen Raum die RPA-Gleichungen der sogenannten Strukturrechnung.

Im Unterschied zu bisherigen Rechnungen, die das vollständige Streuprobblem (RPA-Gleichungen mit Kontinuum) mit relativ einfachen energieunabhängigen lokalen Wechselwirkungen- in der Regel phänomenologisch bestimmt-, behandeln, wird in dieser Arbeit eine Methode entwickelt, die es erlaubt die Strukturrechnungen mit im Prinzip beliebiger Wechselwirkung- energie- und impuls-abhängig-, deduzierbar aus Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (P.K. Haug, Dissertation, J.W. Goethe Universität zu Frankfurt am Main, 1969) durchzuführen, lediglich beim Einschluss des Kontinuums der Einteilchenzustände wird ein separabler Ansatz für die renormierte effektive Wechselwirkung verwendet (Weig70). Dies führt einerseits zu einer Dispersionsrelation für die Energiezustände des Systems aus der man die Bindungs- und Resonanz-Zustände des Compoundkernes im Gegensatz zu anderen Methoden mit einfachen Methoden berechnen kann, und ermöglicht andererseits die Auswahl von realistischen Kräften, die bezüglich der Strukturrechnung die besten Werte liefert.

Im Abschnitt B dieser Arbeit wird die allgemeine Theorie in feldtheoretischer Formulierung angegeben und mit Hilfe der Funktionalmethoden Gleichungen abgeleitet, aus denen man systematisch Näherungen gewinnen kann. Die in diesem Zusammenhang besonders wichtige Bethe-Salpeter-Gleichung für die lineare Antwortfunktion wird hergeleitet und ausführlich diskutiert. Nach Fouriertransformation in den Energieraum hängt der als Integralkern in der

Bethe-Salpeter-Gleichung auftretende irreduzible Vertex (effektive Teilchen-Loch-Wechselwirkung) von drei Energieargumenten ab, was eine exakte Behandlung der Gleichung unmöglich macht. Es werden plausible Argumente angegeben, wie man in gewissen Energiebereichen diese Schwierigkeit umgehen kann. Nach Einführung der sogenannten Quasiteilchennäherung für die Greenfunktionen und die nichtkorrelierte lineare Antwortfunktion erhält man die Gleichungen des Modells in einer Form, die für die numerische Behandlung geeignet sind.

Im Abschnitt C wird ein kurzer Abriß der Streutheorie in zweiter Quantisierung für den Spezialfall eines Ein-Loch-Kerns als Target gegeben. Man erhält einen direkten Zusammenhang zwischen der T-Matrix und der linearen Antwortfunktion, zu deren Berechnung die Kenntnis der Teilchen-Loch Amplituden und der Energiezustände des Compoundkernes erforderlich ist. Man erhält diese, in dem man zuerst das endliche RPA-Gleichungssystem der Strukturrechnung mit einer die experimentellen Werte gut reproduzierenden Teilchen-Loch-Wechselwirkung löst. Im nächsten Schritt wird mit Hilfe des schematischen Modells die Kontinuumsrechnung einbezogen. Auf diese Weise umgeht man das schwierige Fredholm-Problem, das bei nichtseparablen Kräften auftritt. Nach umfangreichen Drehimpulsentwicklungen, die im Abschnitt D zusammengefaßt sind, erhält man schließlich die Gleichungen des Modells, wie sie für die numerischen Rechnungen benötigt werden.

Mit dieser Theorie wurde die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$, ferner der elastische Streuprozess $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ und der inelastische Streu-

prozeß $^{15}\text{N}(n, n)^{15}\text{N}$ berechnet. Als Target für Diese Prozesse wurde der Ein-Proton-Loch-Kern ($1p_{1/2}^{t_3=1/2}1^{16}\text{O}; 0^+$) gewählt. Die Compoundzustände der Reaktion $^{15}\text{N}(p, n)^{15}\text{N}$ sind gerade die angeregten Zustände von ^{16}O , während die Compoundzustände des elastischen und inelastischen Streuprozesses die Anregungszustände von ^{16}N ergeben.

Im Abschnitt E wird die Berechnung der Einteilchenwellenfunktionen, die bei den genannten Prozessen benötigt werden, erläutert. Für die gebundenen Einteilchenzustände der Protonen wie auch der Neutronen wurde ein Oszillatorpotential zugrunde gelegt. Die Einteilchenwellenfunktionen in den Kontinuumszuständen wurden wie üblich aus einem Woods-Saxon-Potential mit LS-Term berechnet, wobei für Protonen auch die Coulomb-Abstoßung berücksichtigt wurde.

Im Endabschnitt werden die gewonnen Ergebnisse im Rahmen der vorgelegten Theorie diskutiert.

B. Vielfermionentheorie mit feldtheoretischen Methoden

Der erste Unterkapitel B1 beschreibt die allgemeine Theorie der Anregung eines Vielnukleonensystems mit feldtheoretischen Methoden (Abr63, Kad62, Weig71). In diesem Zusammenhang werden die Greenfunktionen eingeführt und für diese die Bewegungsgleichungen hergeleitet. Im zweiten Unterkapitel B2 werden die Greenfunktionen als Funktionalableitungen (Bre63) eines Einteilchen-Störoperators dargestellt und die für diese Arbeit entscheidende Bethe-Salpeter-Gleichung für die lineare Antwortfunktion hergeleitet. Im letzten Abschnitt B3 dieses Kapitels werden Näherungsmethoden besprochen, die die Bethe-Salpeter-Gleichung für das vorliegende Problem zugänglich machen und die Renormierung der linearen Antwortfunktion sowie der effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung erlauben.

B1. Allgemeine Theorie der Anregung eines Vielnukleonensystems

Die Streuung eines Nukleons an einem $(A-1)$ - Teilchen- Kern führt zu dem Mehrteilchenproblem des A - Fermionen-Systems. Vorteilhaft ist die Verwendung von feldtheoretischen Methoden, da z.B. das Pauliprinzip automatisch erfasst wird. Weiterhin ist man meistens nur an Ein-, Zwei-Teilchenamplituden etc. interessiert, die bei den konventionellen Methoden umfangreiche Projektionsverfahren erfordern. In feldtheoretischer Formulierung hat der vollständige Hamiltonoperator H für das A -Nukleonensystem bei Beschränkung auf Zwei-Teilchenkräfte, die Form (Abr63)

$$H := a_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha\beta} a_{\beta} + 1/2 a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} V_{\alpha\beta\rho\sigma} a_{\sigma} a_{\rho} \quad (B1.1)$$

$$T_{\alpha\beta} := \langle \alpha | T | \beta \rangle, \quad V_{\alpha\beta\rho\sigma} := 1/2 \{ \langle \alpha\beta | V | \rho\sigma \rangle - \langle \alpha\beta | V | \sigma\rho \rangle \}$$

Der Hamiltonoperator H setzt sich aus dem Einteilchenoperator T der kinetischen Energie und dem Zweiteilchenoperator V der Wechselwirkungsenergie zusammen. Die Operatoren a_{α} , $a_{\alpha}^{\dagger}$ sind die zeitunabhängigen Schrödingerschen Vernichtungs- bzw. Erzeugungs-Operatoren. Für die weitere Rechnung ist zweckmäßig die zeitabhängigen Heisenbergschen Vernichtungs- bzw. Erzeugungs-Operatoren einzuführen. Der Übergang vom Schrödingerbild zum Heisenbergbild wird durch die unitäre Transformation

$$a_1 = e^{iHt_1} a_{\alpha} e^{-iHt_1}, \quad a_1^{\dagger} = e^{iHt_1} a_{\alpha}^{\dagger} e^{-iHt_1} \quad (B1.2)$$

bewerkstelligt.

Wie z.B. den Hamiltonoperator H lassen sich alle physikalischen Observablen durch die Feldoperatoren a , $a^{\dagger}$ ausdrücken. Die Berechnung der Erwartungswerte von Observablen fordert also die Berechnung der Erwartungswerte von Produkten der Operatoren a , $a^{\dagger}$ der Form $a^{\dagger} a a^{\dagger}$, $a a^{\dagger} a^{\dagger}$ oder deren permutativen Produkte höherer Ordnung. Zu diesem Zweck führen wir die Greenschen Funktionen ein, deren Bedeutung im folgenden ersichtlich wird. Die n -Teilchen-Greenfunktion ist definiert als folgender zeitgeordneter Erwartungswert von Heisenbergschen Vernichtungs- bzw.

$\alpha := (\varepsilon, l, j, m, t_3)$ bezeichnet die Quantenzahlen eines zunächst beliebigen Einteilchenmodells, wobei die Einteilchenenergie ε sowohl negativ- (gebunden) als auch positive-Werte (Kontinuum) durchläuft. Über doppelt vorkommende Indizes soll summiert oder integriert werden, falls es nicht ausdrücklich anders vermerkt wird.

$$l := (\alpha, t_1); \quad \hbar := 1$$

Erzeugungs-Operatoren im exakten Grundzustand (Kad62, Weig71):

$$G_n(1, \dots, n; n'_1, \dots, n'_1) := (-i)^n \langle 0 | T(a_1 \dots a_n \hat{a}_{n'_1}^\dagger \dots \hat{a}_1^\dagger) | 0 \rangle \quad (B1.3)$$

$|0\rangle$ ist der exakte Grundzustand des Hamiltonoperators H für das A-Nukleonensystem, also $H|0\rangle = E_0(A)|0\rangle$ und T ist der Wicksche Zeitordnungsoperator. Für den Spezialfall $n=0$ wird $G_0=1$

gesetzt. G_n wird auch $2n$ -Punkt-Funktion genannt.

Die Abhängigkeit von G_n z.B. bezüglich der Variable 1 lautet explizit:

$$G_n(1, \dots, n; n+1, \dots, 2n) := \langle 0 | T(a_1 \dots a_n \hat{a}_{n+1}^\dagger \dots \hat{a}_{2n}^\dagger) | 0 \rangle (-i)^n := (+i)^n \left\{ \sum_{P(v_2 \dots v_{2n})} \text{sign}(v_2 \dots v_{2n}) \cdot \right. \\ \left[\langle 0 | a_1 \dots a_{v_{2n}} | 0 \rangle \ominus (t_1 - t_{v_2}) \ominus (t_{v_2} - t_{v_3}) \dots \ominus (t_{v_{2n-1}} - t_{v_{2n}}) - \right. \\ \left. \langle 0 | a_{v_2} a_1 \dots a_{v_{2n}} | 0 \rangle \ominus (t_{v_2} - t_1) \dots \ominus (t_{v_{2n-1}} - t_{v_{2n}}) \pm \dots + (-)^{2n-1} \langle 0 | a_{v_2} \dots a_{v_{2n}} a_1 | 0 \rangle \right. \\ \left. \left. \ominus (t_{v_2} - t_{v_3}) \dots \ominus (t_{v_{2n}} - t_1) \right] \right\} \quad (B1.4)$$

Hierbei gilt für den Heisenbergoperator a_{v_j} die Vereinbarung:

$$a_{v_j} := \begin{cases} a_{v_j} & , 1 \leq v_j \leq n \\ \hat{a}_{v_j}^\dagger & , n+1 \leq v_j \leq 2n \end{cases} \quad (B1.5)$$

Mit $\ominus(t-t')$ ist die Heavisidesche Sprungfunktion gemeint. Durch

$V_{121'2'}$ führen wir nun eine instantane Wechselwirkung ein:

$$V_{121'2'} = 1/2 \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t'_1) \delta(t'_1 - t'_2) V_{\alpha\beta\sigma\sigma} \quad (B1.6)$$

Aus der Definition (B1.4) erhält man aus der Beziehung $\frac{\partial}{\partial t} \ominus(t) = \delta(t)$, den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $a_1, \hat{a}_1^\dagger$

$$i \frac{d}{dt} a_1 = [a_1, H]_- \quad , \quad i \frac{d}{dt} \hat{a}_1^\dagger = [\hat{a}_1^\dagger, H]_- \quad , \quad (B1.7)$$

die Bewegungsgleichung für die 2n-Punkt-Greenfunktion G_n :

$$-S_{11}'' G_n(1', \dots, n; 1', \dots, n) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \delta_{1m} G_{n-1}(2, \dots, n; 1', \dots, (m-1)', (m+1)', \dots, n) - \\ i V_{1(n+1)1'}''(n+1) G_{n+1}(1', 2, \dots, n, (n+1)'; 1', \dots, n', (n+1)')^* \quad (B1.8)$$

mit

$$S_{11}'' := \delta_{(t_1 - t_1')} (-i \delta_{\alpha\alpha'} \frac{\partial}{\partial t_1} + T_{\alpha\alpha'}) := G_1^0(1, 1')^{-1}$$

Spezialfall für die 2n-Punkt-Greenfunktion, die in der Quantenfeldtheorie eine wichtige Größe darstellt und die mikroskopischen Eigenschaften wie z.B. Dichte, Momente etc. eines Systems charakterisiert, erhält man aus (B1.8):

$$-S_{11}'' G_1(1', 1') = \delta_{11'} - i V_{1212'} G_2(1', 2'; 1', 2')^* \quad (B1.9)$$

Die Gleichungen (B1.8) stellen ein System von gekoppelten Integrodifferentialgleichungen dar. Die Kopplung der 2n-Punkt-Greenfunktion mit 2(n+1)-Punkt-Greenfunktion geht, wie aus (B1.8) ersichtlich, über die Zwei-Teilchen-Wechselwirkung. Die Berechnung von G_1 aus (B1.9) setzt voraus, daß G_2 bekannt ist. Da die Berechnung von G_2 auf direktem Wege nicht möglich ist, müssen Methoden erdacht werden, die die Eliminierung von G_1 aus (B1.9) erlauben. Wie dies im Einzelnen geschieht, wird im folgenden erläutert.

$(n+1)' := (\alpha'_{n+1}, t'_{n+1} + 0)$, „0“ ist infinitesimal und positiv; es legt die Reihenfolge der Zeiten fest, die durch die Einführung der instantanen Wechselwirkung gleichgesetzt werden.

B2. Funktionalmethoden

Eine elegante Methode zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen ohne Verwendung der Aufsummation der Störungstheorie bezüglich der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung v (z.B. tritt in (B1.9) G_1^0 auf) stellt die Funktionalmethode dar, die freie Greenfunktion, G_1^0 etc., vermeidet. Die Greenfunktionen werden dabei als Antwortfunktionen auf eine kleine äußere Störung aufgefaßt: sie sind im wesentlichen die Entwicklungskoeffizienten des Funktionals, das die Änderung des Zustandes unter dem Einfluß einer äußeren Störquelle beschreibt, nach Potenzen dieser Quelle. Eine für unsere Zwecke besonders geeigneter Formalismus wurde von Brenig und Wagner (Bre63) angegeben. Als Greensche Funktionen mit Einschluß der Störung ergeben sich danach mittels der Diracschen Störungstheorie bezüglich Q , $Q = q_{22} a_2^\dagger a_2$, die folgenden Ausdrücke:

$$G_1^Q(1,1') := -i \langle 0 | T a_1^\dagger a_1 U | 0 \rangle / V_{[U]} = - \frac{\delta}{\delta q_{11}} \ln V_{[U]} \quad (B2.1)$$

und

$$G_2^Q(12,12') := (-i)^2 \langle 0 | T a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger a_1 U | 0 \rangle / V_{[U]} \quad (B2.2)$$

mit

$$U = \exp(iQ), \quad V = \langle 0 | T U | 0 \rangle \quad (B2.3)$$

Von den Matrixelementen q_{22} des Einteilchenstöroperators wird vorausgesetzt, daß sie hinreichend klein sind, damit die Störungsreihe konvergiert.

Physikalisch interessanten Größen sind dann die Grenzwerte G_n der oben eingeführten Greenfunktionen für verschwindende äußere Quellen. Sie werden, wie aus (B2.2) zu sehen ist, durch das

Funktional V erzeugt. Man erhält sie durch ein- oder mehrmalige Differentiation nach den Matrixelementen des Einteilchenstöroperators Q mit anschließendem Grenzübergang. So erhält man aus der Definition (B2.2) eine erste wichtige Größe, die sogenannte verallgemeinerte Antwortfunktion, die die Reaktion des Systems in erster Ordnung auf die äußere Störung beschreibt:

$$L_{12;2'}^Q = i \frac{\delta}{\delta q_{22'}} G_1^Q(1,1') = -i (G_{12;2'}^Q - G_1^Q(1,1') G_1^Q(2,2')) \quad (B2.4)$$

Im Grenzfall $Q \rightarrow 0$ wird L^Q die lineare Antwortfunktion L genannt. Der unkorrelierte Teil von L^Q wird mit $L^{UC,Q} \stackrel{Q \rightarrow 0}{\lim} L^{UC,Q} = L^{UC}$ bezeichnet:

$$L_{12;2'}^{UC,Q} = i G_1^Q(1,2') G_1^Q(2,1') \quad (B2.5)$$

Gleichung (B2.4) verwendet man, um die G_2 -Funktion aus der Bewegungsgleichung (B1.9), die man in die Form

$$-(S_{11'}^* + q_{11'}) G_1^Q(1',1') + i V_{12;2'} G_2^Q(1',2';1,2') = \delta_{11'} \quad (B2.6)$$

schreibt, zu eliminieren. Um G_2 aus (B2.6) zu eliminieren, definiert man den "Massenoperator" (auch effektives Einteilchen-Potential genannt) $\Sigma_{11'}$ durch die Forderung

$$\Sigma_{11'} G_1^Q(1',1') = -i V_{12;2'} G_2^Q(1',2';1,2') \quad (B2.7)$$

Damit lautet (B2.6):

$$-(S_{11'}^* + q_{11'} + \Sigma_{11'}) G_1^Q(1',1') = \delta_{11'} \quad (B2.8)$$

Gleichung (B2.8), die unter dem Namen Dyson-Gleichung bekannt ist, ermöglicht es, durch Funktionalableitung derselben eine zweite Beziehung für $\frac{\delta}{\delta q_{22}} G_1^Q(1,1')$ zu erhalten:

$$\frac{\delta}{\delta q_{22}} G_1^Q(1,1') = G_1^Q(1,2') G_1^Q(2,1') + G_1^Q(1,3) \frac{\delta \Sigma_{33'}}{\delta q_{22}} G_1^Q(3,1') \quad (B2.9)$$

Durch Einsetzen von (B2.4), (B2.7) und (B2.8) in (B2.9) erhält man nach einigen Zwischenrechnungen die gesuchte Gleichung für den Massenoperator Σ :

$$\Sigma_{11'} = -i2 V_{121'2'} G_1^Q(2,2) + i V_{12'32} G_1^Q(3,3) \frac{\delta \Sigma_{31'}}{\delta q_{22}} \quad (B2.10)$$

Die renormierte Störungsreihe (enthält keine Terme mit G_1^0) für Σ ergibt sich durch gegenseitige Iteration von (B2.9) und (B2.10) (Die o.Näherung $\frac{\delta \Sigma}{\delta q} = 0$ entspricht der Hartree-Fock-Lösung; d.h. $\Sigma^{HF} = -2iVG$). Die entsprechende 2-Punkt-Funktion ergibt sich aus der Iteration von (B2.8) in der jeweiligen Näherung für Σ . Aus dieser Iteration sehen wir, daß Σ nur über G_1^Q von q abhängt. Dies ist auch verständlich: Σ hängt von den höheren Greenschen Funktionen ab, die über das ganze System von G_1^Q abhängen. Es ist daher die Einführung eines effektiven Potentials

I durch die Gleichung

$$\frac{\delta \Sigma_{11'}}{\delta q_{22}} = \frac{\delta \Sigma_{11'}}{\delta G_1^Q(3,3)} \cdot \frac{\delta G_1^Q(3,3)}{\delta q_{22}} = -i I_{131'3'} \frac{\delta G_1^Q(3,3)}{\delta q_{22}} \quad (B2.11)$$

zweckmäßig. Für den Grenzfall $Q \rightarrow 0$ heißt I irreduzible Teilchen-Loch- Wechselwirkung.

Die Ableitung $\frac{\delta G_1^Q}{\delta q}$ in (B2.11) läßt sich durch Einführung einer T- Matrix eliminieren:

$$T_{121'2'} = I_{121'2'} - I_{131'3'} L_{343'4'}^{UC,Q} T_{424'2'} \quad (B2.12)$$

oder in kurzschreibweise:

$$T = I - I L^{UC,Q} T \quad (B2.13)$$

Durch Differentiation von (B2.10) nach $G_1^Q(2,2)$ erhält man eine weitere Gleichung, in der I und T miteinander verknüpft sind:

$$\begin{aligned} I_{121'2'} = & 2 V_{121'2'} + V_{1234} L_{344'3'}^{UC,Q} T_{341'2'} + V_{1432} L_{344'3'}^{UC,Q} T_{321'4} \\ & + V_{1324} L_{344'3'}^{UC,Q} T_{241'3} + V_{1435} L_{355'3}^{UC,Q} G_1^Q(4,4) \frac{\delta G_1^Q(2,2)}{\delta G_1^Q(2,2)} \end{aligned} \quad (B2.14)$$

Berücksichtigt man die Definitionsgleichung (B2.12) für die T-Matrix und die Beziehung (B2.14), so erhält man für T eine Gleichung, die nur von G_1^Q und $\frac{\delta T}{\delta G_1^Q}$ abhängt. Vernachlässigung von $\frac{\delta T}{\delta G_1^Q}$ und nichtlinearer Terme ergibt dann das entkoppelte Gleichungssystem für T:

$$T_{1212} = 2V_{1212} + V_{1234} L_{3443}^{UC,Q} T_{3412} - 2V_{1413} L_{3443}^{UC,Q} T_{3242} + V_{1432} L_{3443}^{UC,Q} T_{3214} + V_{1324} L_{3443}^{UC,Q} T_{2413} \quad (B2.15)$$

Man sieht daraus, daß der zweite Summand eine Leitergraphen-Summe, der dritte Summand eine Blasengraphen-Summe, der vierte- und fünfte Summand eine Summe über Austauschterme der Blasengraphen darstellt.

Für die effektive Zweiteilchenwechselwirkung I erhält man durch Einsetzen von (B2.12) in (B2.14), Vernachlässigung nichtlinearer Terme und von $\frac{\delta T}{\delta G_1^Q}$, die Gleichung:

$$I_{1212} = 2V_{1212} + V_{1234} L_{3443}^{UC,Q} I_{3412} + V_{1432} L_{3443}^{UC,Q} I_{3214} + V_{1324} L_{3443}^{UC,Q} I_{2413} \quad (B2.16)$$

Der Vergleich von (B2.15) mit (B2.16) zeigt, daß T und I sich nur durch den Blasenterm unterscheiden. Das kann man leicht auf iterativem Wege feststellen. Insbesondere folgt also, daß T und I in der reinen Leiternäherung identisch sind.

Eine für diese Arbeit besonders wichtige Gleichung, nämlich die Bethe-Salpeter Gleichung, erhält man, wenn man (B2.9) und (B2.11) miteinander kombiniert:

$$L_{1212}^Q = L_{1212}^{UC,Q} - L_{1313}^{UC,Q} I_{3434} L_{4242}^Q \quad (B2.17)$$

oder kurz

$$L^Q = L^{UC,Q} - L^{UC,Q} I L^Q \quad (B2.18)$$

Durch Iteration erhält man aus (B2.18):

$$\underline{L}^Q = \underline{L}^{UC, UC, Q} (I - \underline{L}^{UC, Q} I_{\pm} \dots) \underline{L}^{UC, Q} \quad (B2.19)$$

Der in Klammer stehende Ausdruck ist, wenn (B2.13) berücksichtigt wird, die iterative Reihe für T. Damit läßt sich für auch

$$\underline{L}^Q = \underline{L}^{UC, Q} - \underline{L}^{UC, Q} T \underline{L}^{UC, Q} \quad (B2.20)$$

schreiben.

B3. Fouriertransformation, Spektraldarstellungen und Näherungen

Die in (B2) eingeführten Größen G_1 , G_2 , $\underline{L}$ und I sind in den Zeitvariablen translationsinvariant. Es ist daher von Vorteil die Energie variablen einzuführen und zu den Fouriertransformierten überzugehen. Diese definieren wir gemäß:

$$F_{1, \dots, n; 1', \dots, n'} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\epsilon_1 \dots d\epsilon_n e^{i(\epsilon_1 t_1 + \dots + \epsilon_n t_n - \epsilon'_1 t'_1 - \dots - \epsilon'_n t'_n)} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha'_1 \dots \alpha'_n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n) \quad (B3.1)$$

mit

$$F_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha'_1 \dots \alpha'_n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dt_1 \dots dt_n e^{i(\epsilon_1 t_1 + \dots + \epsilon_n t_n - \epsilon'_1 t'_1 - \dots - \epsilon'_n t'_n)} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha'_1 \dots \alpha'_n}(t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n) \quad (B3.2)$$

Die Fouriertransformierten von G_1 und der Funktionen, die von vier Zeitvariablen abhängen, können wegen der Translationsinvarianz in den Zeitvariablen (Energieerhaltung) in folgender Form geschrieben werden (Bre65):

$$G_{\alpha\alpha'}(\epsilon_1, \epsilon'_1) = \delta(\epsilon_1 - \epsilon'_1) G_{\alpha\alpha'}(\epsilon_1) = \delta(\epsilon_1 - \epsilon'_1) < 0 | [a_{\alpha}(\epsilon_1 - H + E_0 + i\eta)^{\dagger} a_{\alpha'}^{\dagger}(\epsilon + H - E_0 - i\eta) a_{\alpha}] | 0 > \quad (B3.3)$$

$$A_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon'_1, \epsilon'_2) = \delta(\omega - \omega') A_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \epsilon', \omega) \quad (B3.4)$$

Im

folgenden werden die aus (B2) benutzte Gleichungen für $Q \rightarrow 0$ betrachtet.

In (B3.4) wurden sogenannte " Teilchen-Loch "-Energievariablen verwendet, d.h. :

$$\epsilon = 1/2 (\epsilon_1 + \epsilon_1'), \quad \epsilon' = 1/2 (\epsilon_2 + \epsilon_2'), \quad \omega = \epsilon_1 - \epsilon_1', \quad \omega' = \epsilon_2' - \epsilon_2 \quad (B3.5)$$

In den Energievariablen lauten die Gleichungen (B2.17) und (B2.5) für die korrelierte- bzw. unkorrelierte sog. verallgemeinerte Antwortfunktion :

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \epsilon', \omega) = L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \epsilon', \omega) - \int d\epsilon'' d\epsilon''' L_{\alpha\gamma\alpha'\gamma'}^{UC}(\epsilon, \epsilon'', \omega) I_{\gamma\delta\gamma'\delta'}(\epsilon'', \epsilon''', \omega) L_{\delta\beta\delta'\beta'}(\epsilon''', \epsilon', \omega) \quad (B3.6)$$

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \epsilon', \omega) = \delta(\epsilon - \epsilon') L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \omega) \quad (B3.7)$$

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \omega) = i G_{\alpha\beta}(\epsilon + \omega/2) G_{\beta'\alpha'}(\epsilon - \omega/2) \quad (B3.8)$$

Berücksichtigt man (B3.7) und integriert in (B3.6) nach ϵ , so erhält man:

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \omega) = L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \omega) - L_{\alpha\gamma\alpha'\gamma'}^{UC}(\epsilon, \omega) \int d\epsilon' I_{\gamma\delta\gamma'\delta'}(\epsilon, \epsilon', \omega) L_{\delta\beta\delta'\beta'}(\epsilon', \omega) \quad (B3.9)$$

mit

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \omega) := \oint d\epsilon' L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \epsilon', \omega) \quad (B3.10)$$

Für die Fouriertransformierte der (normalen) Antwortfunktion ergibt sich aus (B2.4):

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) = -<0| \{ \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} (\omega - H + i\eta)^{-1} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} a_{\beta} - \hat{a}_{\beta}^{\dagger} a_{\beta} (\omega + H - i\eta)^{-1} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \} |0>, \quad \omega \neq 0 \quad (B3.11)$$

Aus den Gleichungen (B3.11) und (B3.10) liest man ab

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint d\epsilon L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\epsilon, \omega), \quad \omega \neq 0 \quad (B3.12)$$

Wegen der Energieabhängigkeit der effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung I , ist es nicht möglich aus (B3.9) eine exakte Gleichung für $L_{(\omega)}$ abzuleiten. Um $L_{(\omega)}$ näherungsweise zu bestimmen, nimmt man an, daß die effektive Wechselwirkung I in dem für die Integration wesentlichen Bereich energieunabhängig ist (Mig64). Dies bedeutet, daß alle Retardierungseffekte, die durch I berücksichtigt werden (ϵ, ϵ' -Abhängigkeit) zu vernachlässigen sind. Unter dieser Annahme und anschließender Integration nach

ε gemäß (B3.12) vereinfacht sich (B3.9) zu

$$L_{\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\omega) = L_{\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{UC}(\omega) - 2\pi L_{\alpha\gamma\dot{\alpha}\dot{\gamma}}^{UC}(\omega) I_{\dot{\gamma}\delta\gamma\delta}(\omega) L_{\delta\beta\dot{\delta}\dot{\beta}}(\omega) \quad (B3.13)$$

Die Wechselwirkung $I_{(\omega)}^{\dagger}$ kann entweder phänomenologisch vorgegeben werden oder näherungsweise z.B. in der Leiternäherung berechnet werden. Trotz dieser Vereinfachungen ist die Lösung von Gleichung (B3.13) mit großen Schwierigkeiten verbunden. Daher muss für die unkorrelierte Antwortfunktion $L_{(\omega)}^{UC}$ eine Näherung gemacht werden. Zu diesem Zweck gehen wir einen Schritt zurück und betrachten $L_{(\varepsilon,\omega)}^{UC}$. Laut (B3.8) ist $L_{(\varepsilon,\omega)}^{UC}$ im wesentlichen ein Produkt zweier Einteilchen-Greenfunktionen. Dies legt ein genaueres Studium von $G_{(\varepsilon)}$ nahe.

Durch Einschieben eines vollständigen Systems von Zwischenzuständen auf der rechten Seite von (B3.3) finden wir:

$$G_{\alpha\dot{\alpha}}(\varepsilon) = \sum_{\beta} \frac{\langle 0 | a_{\alpha} | \Omega_{\beta} \rangle \langle \Omega_{\beta} | \dot{a}_{\dot{\alpha}} | 0 \rangle}{\varepsilon - E_{\beta}^{A+1} + E_0^A + i\eta} + \sum_{\gamma} \frac{\langle 0 | \dot{a}_{\dot{\alpha}} | \Lambda_{\gamma} \rangle \langle \Lambda_{\gamma} | a_{\alpha} | 0 \rangle}{\varepsilon + E_{\gamma}^{A-1} - E_0^A - i\eta} \quad (B3.14)$$

Die Indizes β, γ durchlaufen ein vollständiges System von Zuständen mit $(A \pm 1)$ -Teilchen. Wie man sieht, sind die Pole von $G_{\alpha\dot{\alpha}}(\varepsilon)$ durch die "Einteilchenenergien"

$$\varepsilon_{\beta} = E_{\beta}^{A+1} - E_0^A, \quad \varepsilon_{\gamma} = E_0^A - E_{\gamma}^{A-1} \quad (B3.15)$$

gegeben. Die Residuen sind die Einteilchenstärken der zugehörigen Zustandsvektoren.

$$Z_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta} := \langle 0 | a_{\alpha} | \Omega_{\beta} \rangle \langle \Omega_{\beta} | \dot{a}_{\dot{\alpha}} | 0 \rangle, \quad Z_{\alpha\dot{\alpha}}^{\gamma} := \langle 0 | \dot{a}_{\dot{\alpha}} | \Lambda_{\gamma} \rangle \langle \Lambda_{\gamma} | a_{\alpha} | 0 \rangle \quad (B3.16)$$

†

Zur Berechnung einer energieabhängigen Wechselwirkung I siehe P.K.Haug, Dissertation, J.W.Goethe-Universität zu Frankfurt am Main, 1969.

Mit (B3.16) läßt sich (B3.14) umschreiben

$$G_{\alpha\alpha'}(\epsilon) = \sum_{\beta} \frac{Z_{\alpha\alpha'}^{\beta}}{\epsilon - \epsilon_{\alpha} + i\eta} + \sum_{\gamma} \frac{Z_{\alpha\alpha'}^{\beta\gamma}}{\epsilon - \epsilon_{\gamma} - i\eta} \quad (\text{B3.17})$$

Man liest ab, daß zur Berechnung der Einteilchenstärken, die Kenntnis über die exakten Lösungen des $(A \pm 1)$ -Teilchenproblems vorausgesetzt wird, was in der Praxis nicht möglich ist. Im folgenden werden einige Annahmen diskutiert, die eine Renormierung des Problems ermöglichen. Für den Spezialfall eines reinen Schalenmodells sind die $Z_{\alpha\alpha'}^{\beta\gamma}$ bei Verwendung der entsprechenden Einteilchenbasis diagonal und man erhält:

$$G_{\alpha\alpha'}(\epsilon) = \delta_{\alpha\alpha'} \left\{ \frac{1-n_{\alpha}}{\epsilon - \epsilon_{\alpha} + i\eta} + \frac{n_{\alpha}}{\epsilon - \epsilon_{\alpha} - i\eta} \right\} =: \delta_{\alpha\alpha'} \tilde{G}_{\alpha}^S(\epsilon) \quad (\text{B3.18})$$

Hierbei bezeichnet n_{α} die Besetzungszahl

$$n_{\alpha} := \begin{cases} 1 & \alpha < \alpha_F \\ 0 & \alpha > \alpha_F \end{cases} \quad (\text{B3.19})$$

α_F ist die Fermikante.

Für die unkorrelierte Antwortfunktion $L_{(\epsilon, \omega)}^{UC}$ erhält man aus (B3.8) durch Einsetzen von (B3.18)

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \omega) =: \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta'\alpha'} \left\{ \frac{1-n_{\alpha}}{\epsilon + \omega/2 - \epsilon_{\alpha} + i\eta} + \frac{n_{\alpha}}{\epsilon + \omega/2 - \epsilon_{\alpha} - i\eta} \right\} \left\{ \frac{1-n_{\beta}}{\epsilon - \omega/2 - \epsilon_{\beta} + i\eta} + \frac{n_{\beta}}{\epsilon - \omega/2 - \epsilon_{\beta} - i\eta} \right\} \quad (\text{B3.20})$$

und daraus unter Berücksichtigung von (B3.12)

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\omega) =: \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta'\alpha'} \left\{ \frac{(1-n_{\alpha})n_{\beta}}{\omega - \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta} + i\eta} - \frac{n_{\alpha}(1-n_{\beta})}{\omega - \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta} - i\eta} \right\} =: \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta'\alpha'} \tilde{L}_{\alpha\alpha'}^S(\omega) \quad (\text{B3.21})$$

$\tilde{L}_{\alpha\beta}^S(\omega)$ charakterisiert die unkorrelierte Schalenmodell Antwortfunktion. Das Schalenmodell stellt eine Idealisierung der Situation dar, in Wirklichkeit sind die Zustände $\hat{a}_{\alpha}|0\rangle$ und $a_{\alpha}|0\rangle$ nur näherungsweise Lösungen des Hamiltonoperators H . Von einem genaueren Modell wird man daher erwarten, daß z.B. die Einteilchenstärken $Z_{\alpha\alpha'}^{\beta\gamma}$ eine Verteilung gemäß Fig.1 haben,



wobei die $Z_{\alpha\alpha}^{\beta,\gamma}$ durch $0 \leq Z_{\alpha\alpha}^{\beta,\gamma} \leq 1$ beschränkt sind; die experimentell bestimmten Einteilchenstärken liegen bei den doppeltmagischen Kernen zwischen 0.6 und 0.9 .

Wir suchen nun eine genäherte Form der Spektraldarstellung, die gewissermassen die Mittelposition zwischen der allgemeinen Form (B3.17) und dem Einteilchen-Spezialfall (B3.18) einnimmt. In den meisten Fällen überwiegt der Überlapp eines Zustandes mit dem Schalenmodellzustand, d.h. es dominiert ein Zustand, der als Schalenmodellzustand beschreibbar ist (Einpólnäherung) :

$$G_{\alpha\alpha'}(\epsilon) = \delta_{\alpha\alpha'} \left\{ \frac{|<0|a_\alpha|\Omega_\alpha>|^2}{\epsilon - \epsilon_\alpha + i\eta} + \frac{|<0|a_\alpha|\Lambda_\alpha>|^2}{\epsilon - \epsilon_\alpha - i\eta} \right\} + G_{\alpha\alpha'}^R(\epsilon) \quad (\text{B3.22})$$

Für die Residuen gilt näherungsweise:

$$\begin{aligned} |<0|a_\alpha|\Omega_\alpha>|^2 &\approx Z_\alpha(1 - n_\alpha) \\ |<0|a_\alpha|\Lambda_\alpha>|^2 &\approx Z_\alpha n_\alpha \end{aligned} \quad (\text{B3.23})$$

Die bei den Polen ϵ_α von G reguläre Funktion G^R gibt den Untergrund der Resonanz an, der Renormierungsfaktor Z_α berücksichtigt die dadurch sich ergebende Verminderung der Einteilchenstärke.

Im einzelnen sind zur Begründung von (B3.22) folgende Überlegungen von Wichtigkeit. Bei sphärischen Kernen und den direkten Nachbarn sind Schalenmodellquantenzahlen gute Quantenzahlen. Wählt man diese als Basis, so wird $G_{\alpha\alpha'}(\epsilon)$ in α, α' diagonal und die Summe in (B3.17) läuft nur über die Zustände, die in den Schalenmodellquantenzahlen mit dem Index der Zweipunktfunktion übereinstimmen. Im allgemeinen lassen sich die Summen nicht

↳ Mögliche Ausnahme : Anzahl der radialen Knoten.

auf einen einzigen Term reduzieren. Trotzdem überwiegt in den meisten Fällen der Überlapp eines Zustandes mit dem Schalenmodellzustand und damit ist die Näherung (B3.22) gerechtfertigt. Die Form (B3.22) von $G_{\alpha\alpha'}(\epsilon)$ wird als Quasiteilchennäherung für die Zweipunktfunktion bezeichnet: Die Gleichung besagt ja gerade, daß die in der Nähe der Fermikante liegenden A-Teilchen-Zustände von H im wesentlichen als Einteilchenanregungen der Energie ϵ_α beschrieben werden können. Damit ist auch klar, daß bei höheren Energien die Quasiteilchennäherung versagt (Lut60). In der Nähe der Pole läßt sich (B3.22) unter Berücksichtigung von (B3.23) in der Form

$$G_{\alpha\alpha'}(\epsilon) \approx Z_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} \left\{ \frac{1-n_\alpha}{\epsilon - \epsilon_\alpha + i\eta} + \frac{n_\alpha}{\epsilon - \epsilon_\alpha - i\eta} \right\} \quad (B3.24)$$

schreiben. Mit dieser Näherung erhält man für $L_{(\epsilon, \omega)}^{UC}$ und $L_{(\omega)}^{UC}$

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\epsilon, \omega) = i(Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{1/2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} \left\{ \frac{1-n_\alpha}{\epsilon + \omega/2 - \epsilon_\alpha + i\eta} + \frac{n_\alpha}{\epsilon + \omega/2 - \epsilon_\alpha - i\eta} \right\} \cdot \left\{ \frac{1-n_\beta}{\epsilon - \omega/2 - \epsilon_\beta + i\eta} + \frac{n_\beta}{\epsilon - \omega/2 - \epsilon_\beta - i\eta} \right\} \quad (B3.25)$$

$$\text{und } L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\omega) = -i(Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{1/2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} \left\{ \frac{(1-n_\alpha)n_\beta}{\omega - \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta + i\eta} - \frac{n_\beta}{\omega - \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - i\eta} \right\} \quad (B3.26)$$

Berücksichtigt man (B3.21), so läßt sich für (B3.26) schreiben:

$$L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\omega) = (Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{1/2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} \tilde{L}_{\alpha\alpha'}^S(\omega) \quad (B3.27)$$

Die Renormierungsfaktoren können bei dieser Arbeit, wegen der phänomenologischen Vorgabe einer energieunabhängigen effektiven Wechselwirkung I nicht bestimmt werden. Man nimmt daher im Prinzip die experimentellen Werte.

Die Einpolnäherung (B3.27) für $L_{(\omega)}^{UC}$ bedeutet für die Bethe-Salpeter-Gleichung eine weitere Vereinfachung. Die Beseitigung der Renormierungsfaktoren geschieht durch die sog. Renormierungsprozedur, die in den folgenden Vereinbarungen ihren Ausdruck findet (Mig64, Mig67):

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\omega) := (Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{-1/2} L_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{UC}(\omega) \quad (B3.28)$$

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) := (Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{-1/2} L_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \quad (B3.29)$$

$$\tilde{I}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) := (Z_\alpha Z_\beta Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{1/2} I_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) \quad (B3.30)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\alpha'}(\omega) := (Z_\alpha Z_{\alpha'})^{-1/2} G_{\alpha\alpha'}(\omega) \quad (B3.31)$$

Aus (B3.28) liest man ab, daß $\tilde{L}^{UC}(\omega)$ die reine Schalenmodell Antwortfunktion ist. Für die Bethe-Salpeter-Gleichung erhält man mit den Vereinbarungen (B3.28) bis (B3.30):

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) = \tilde{L}_{\alpha\alpha'}^S(\omega) [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha'} - 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha'\delta'}(\omega) \tilde{L}_{\delta\beta\delta'}(\omega)] \quad (B3.32)$$

oder in völlig äquivalenter Schreibweise:

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) = \tilde{L}_{\beta\beta'}^S(\omega) [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha'} - 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{L}_{\alpha\delta\alpha'\delta'}(\omega) \tilde{I}_{\delta\beta\delta'}(\omega)] \quad (B3.33)$$

Diese beiden Gleichungen spielen bei dieser Arbeit eine bedeutende Rolle. Die Einzelheiten werden in den nächsten Abschnitten erläutert.

Zuletzt wollen wir die Eigenschaften der renormierten Antwortfunktion $\tilde{L}(\omega)$ näher untersuchen. Durch Einschieben eines vollständigen A-Teilchensystems in (B3.11) unter Berücksichtigung von (B3.29) finden wir

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(\omega) = - \sum_{|M\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\tilde{p}_{\alpha\alpha',M} \tilde{p}_{\beta\beta',M}^*}{\omega - \epsilon_M + i\eta} - \frac{\tilde{p}_{\beta\beta',M} \tilde{p}_{\alpha\alpha',M}^*}{\omega + \epsilon_M - i\eta} \right\}, \omega \neq 0, (E_0(A)=0) \quad (B3.34)$$

Mit $|M\rangle$ bezeichnen wir sowohl die Streuzustände $|S\rangle$, als auch die Bindungszustände $|B\rangle$ des A-Teilchensystems. Man sieht, daß $\tilde{L}(\omega)$ Pole an den Anregungsenergien E_B des Systems hat und zwar symmetrisch zum Nullpunkt. Die Residuen sind Produkte von Teilchen-Loch-Amplituden.

* $\sum$ bezeichnet-falls nicht explizit anders definiert- sowohl Integration als auch Summation über die betreffenden Zustände.

$$\tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} = (Z_{\alpha} Z_{\alpha'})^{-1/2} \langle 0 | a_{\alpha'}^{\dagger} a_{\alpha} | M \rangle \quad (B3.35)$$

Diese Amplituden bestimmen die Übergangswahrscheinlichkeiten durch Einteilchenoperatoren. Sie sind groß, wenn $|B\rangle$ ein Kollektivzustand, d.h. eine kohärente Überlagerung von elementaren Teilchen-Loch-Anregungen ist. Systemanregungen mit starkem Einteilchencharakter werden wir daran erkennen, daß eine Amplitude überwiegt, während bei stark kollektiven Anregungen viele Amplituden gleicher Größenordnung kohärent überlagert sind.

Benutzt man die Relation (B3.21) für $\tilde{L}^S(\omega)$ sowie die Darstellung (B3.34), so kann man Gleichung (B3.33) umschreiben zu

$$\sum_{|M\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\beta\beta',M}^*}{\omega - \epsilon_M + i\eta} - \frac{\tilde{\rho}_{\beta\beta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M}^*}{\omega + \epsilon_M - i\eta} \right\} = (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) \frac{n_{\alpha} + n_{\alpha'}}{\omega - \epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\alpha'} - i\eta (n_{\alpha} - n_{\alpha'})} \cdot \{ \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} + 2\pi \sum_{|M\rangle \neq |0\rangle} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha'\delta'} \left(\frac{\tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M}^*}{\omega - \epsilon_M + i\eta} - \frac{\tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M}^*}{\omega + \epsilon_M - i\eta} \right) \} \quad (B3.36)$$

Die volle Kenntnis über $\tilde{L}(\omega)$ ist äquivalent zur Bestimmung aller Teilchen-Loch-Amplituden, sowie aller Bindungs- und Resonanz-Energien des Systems. Der Faktor $(n_{\alpha} - n_{\alpha'})$ der Quasiteilchenbesetzungszahlen in (B3.36) stellt sicher, daß in der Sprache des reinen Schalenmodells nur sog. Teilchen-Loch-Amplituden oder Loch-Teilchen-Kombinationen auftreten. Da in der RPA der Grundzustand korreliert ist, d.h. keine reine Slaterdeterminante darstellt, sind auch sog. Loch-Teilchen Anregungen möglich.

Im folgenden Abschnitt dieser Arbeit werden wir unter anderem auch anführen, welche Einschränkungen des Schalenmodellkonfigurationsraumes und der A-Teilchen-Basis notwendig sind, um aus (B3.36) die renormierten RPA-Gleichungen für gebundene Zustände zu erhalten. Diese RPA-Gleichungen stellen ein normales Eigenwertproblem dar und führen zur sog. Strukturrechnung. Diese wird in die Theorie der Streuung eines Nukleons an einen Ein-Loch-Kern einbezogen.

C. Nukleonen-Streuung an Ein-Loch-Kernen

Das Ziel des ersten Unterkapitels (C1) ist es die Formulierung des Problems der Streuung eines Nukleons an einen Ein-Loch-Kern (Wei66, Gil66, Lem68, Weig69) und die Herstellung eines direkten Zusammenhangs zwischen der Streutheorie und der renormierten linearen Antwortfunktion. Dadurch reduziert sich das Streuproblem auf die Berechnung der Teilchen-Loch-Amplituden und Anregungsenergien des Systems aus den vollen RPA-Gleichungen, d.h. RPA-Gleichungen mit Kontinuum (C2). Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt (C3,C4) werden die konventionellen RPA-Gleichungen gelöst. Sodann werden die Ergebnisse aus dieser Rechnung in die RPA-Gleichungen mit Kontinuum einbezogen (C5). Im Abschnitt (C6) wird die T-Matrix explizit hergeleitet und ausführlich diskutiert.

C1. Formulierung des Streuproblems

Untersucht werden Streuprozesse der Art (Wei66, Blo65, Lem68, Kre74, Mik63, Ebe67, Gil66, Han68, Die68)

$$a + A \longrightarrow \begin{cases} d + A^* \\ b + B \end{cases}$$

d. h. ein Nukleon a wird auf einen Target A geschossen. Dabei treten sowohl elastische und inelastische Streuung (Kanal α) als auch Reaktionen auf, d.h. im Endzustand liegen die Teilchen b und B vor (Kanal β).

Als Target nimmt man einen Ein-Loch-Kern und betrachtet die

Streuung eines Nukleons an diesen Kern. Von dem Target setzt man also voraus, daß es durch den Core plus ein Quasi-Loch im Schalenmodellzustand α beschreiben werden kann, was z.B. für doppeltnukleonische Kerne eine plausible Annahme darstellt. Im Folgenden soll $|0\rangle$ immer den Grundzustand eines doppeltnukleonischen Kerns mit A Nukleonen bezeichnen. Damit kann man für den Target-Kern-Zustand schreiben:

$$|T\rangle = Z_{\alpha}^{-1/2} |\alpha\rangle \quad (C1.1)$$

$|0\rangle$ charakterisiert den normierten korrelierten Grundzustand des doppeltnukleonischen A-Teilchen Compound-Kernes, also $H|0\rangle = E_0(A)|0\rangle$ ($E_0(A) \neq 0$). Z_{α} ist die Migdalsche Renormierungskonstante (s.B3), a_{α} und $a_{\alpha}^{\dagger}$ sind die Schrödingerschen Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren. Für den Hamiltonoperator H gilt wieder in der zweiten Quantisierung die Form:

$$H = H_0 + V = \langle \alpha | H_0 | \beta \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} + 1/2 V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} \quad (C1.2)$$

Der Operator H_0 ist der Hartree-Fock Hamiltonoperator und V ist die Restwechselwirkung. (Im allgemeinen ist das Hartree-Fock-Potential eine komplizierte nichtlokale Funktion und wird daher durch ein lokales endliches Schalenmodellpotential ersetzt, womit dann H_0 in ein gewöhnliches Schalenmodellhamiltonoperator übergeht). Die Eigenzustände $|\alpha\rangle$ des Einteilchenoperators H_0 erhält man aus:

$$H_0 |\alpha\rangle = \epsilon_{\alpha} |\alpha\rangle \quad (C1.3)$$

Das vollständige Spektrum von H_0 besteht aus einem diskreten und einem kontinuierlichen Teil. Die Zustände $|\alpha\rangle$ aus dem Kontinuum werden so definiert, daß sie asymptotisch stehende Wellen beschreiben. Das kann durch folgende Konvention erreicht werden:

$$|\alpha\rangle = e^{i\delta_{\alpha}} |\alpha\rangle \quad (C1.4)$$

Dadurch kann ein großer Teil der Rechnung im Reellen durchgeführt werden. Durch $(\pm)$ unterscheidet man wie üblich die ausgehende und die ankommende Streuwelle und mit δ_α bezeichnet man die Streuphase an einem Schalenmodellpotential. Für den Schrödinger-Operator a_α lautet die Phasenrelation (C1.4):

$$\begin{pmatrix} \pm \\ a \end{pmatrix}_\alpha = e^{\mp i\delta_\alpha} a_\alpha \quad (C1.5)$$

Nun werden die renormierten Streulösungen für die Hamiltonoperatoren H_0 und H berechnet. Diese benötigt man, um einerseits die S-Matrix für das Streuproblem zu erhalten und andererseits einen direkten Zusammenhang zwischen den Streuzuständen und der renormierten linearen Antwortfunktion zu erhalten. Die renormierte Streulösung des Schalenmodellhamiltonoperators H_0 (H ohne Restwechselwirkung V) ist durch

$$|\Phi_{k,i}^{(\pm)}\rangle = (Z_k Z_i)^{-1/2} a_k^{(\pm)} a_i |0\rangle \quad (C1.6)$$

gegeben. Mit der Phasenkonvention (C1.5) geht (C1.6) über in

$$|\Phi_{k,i}^{(\pm)}\rangle = (Z_k Z_i)^{-1/2} e^{i\delta_k} a_k^\dagger a_i |0\rangle \quad (C1.7)$$

Für die renormierte Streulösung des vollen Hamiltonoperators H und damit des vollen Streuproblems ergibt die Lippmann-Schwinger-

Der Grundzustand $|0\rangle$ enthält keine Komponenten aus dem Kontinuum, daher sind alle Renormierungsfaktoren für Kontinuum exakt gleich Eins (s. Abschnitt B3).

Für die weitere Rechnung werden bezüglich der Einteilchenzustände folgende Vereinbarungen getroffen:

- $p, k \in \{\text{Kontinuum}\}$
- $i, j \in \{\text{Lochzustände}\}$
- $r, s \in \{\text{gebundene Teilchenzustände}\}$

Gleichung ($\eta \rightarrow 0$):

$$|\Psi_{p,j}^{(*)}\rangle = |\phi_{p,j}^{(*)}\rangle + \frac{1}{E - H + i\eta} (H - E) |\phi_{p,j}^{(*)}\rangle \quad (C1.8)$$

oder

$$|\Psi_{p,j}^{(*)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_{p,j}^{(*)}\rangle \quad (C1.9)$$

E ist die Gesamtenergie des Systems:

$$E = \epsilon_p - \epsilon_j$$

ϵ_p ist die Energie des Geschossteilchens und ϵ_j die Energie des Loches. Die totale S-Matrix ist gegeben durch den Überlapp:

$$S_{ki,pj} = \langle \Psi_{k,i}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(*)} \rangle \quad (C1.10)$$

In der verallgemeinerten Schalenmodellldarstellung ist der Streuzustand durch den Überlapp

$$\langle \phi_{k,j}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(*)} \rangle = \langle \phi_{k,i}^{(-)} | \frac{i\eta}{E - H + i\eta} | \phi_{p,j}^{(*)} \rangle = e^{i(\delta_p + \delta_k)} (Z_k^\dagger Z_p Z_i Z_j)^{-1/2} \langle 0 | a_i^\dagger a_k \frac{i\eta}{E - H + i\eta} a_p^\dagger a_j | 0 \rangle \quad (C1.11)$$

und

$$\langle \phi_{r,i}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(*)} \rangle = \langle \phi_{r,i}^{(-)} | \frac{i\eta}{E - H + i\eta} | \phi_{p,j}^{(*)} \rangle = e^{i\delta_p} (Z_r^\dagger Z_p Z_i Z_j)^{-1/2} \langle 0 | a_i^\dagger a_r \frac{i\eta}{E - H + i\eta} a_p^\dagger a_j | 0 \rangle \quad (C1.12)$$

gegeben. Aus (C1.11) erhält man unter Berücksichtigung von (C1.8) auf der Energieschale folgenden Ausdruck (Gol64):

$$\langle \phi_{k,i}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(*)} \rangle = S_{kp}^S \delta_{ij} + \frac{1}{E_{pj} - E_{ki} + i\eta} T_{ki,pj}^R \quad (C1.13)$$

wobei das Schalenmodell S-Matrixelement durch

$$S_{kp}^S = \langle k^{(-)} | p^{(*)} \rangle \quad (C1.14)$$

definiert ist. Aus (C1.13) ist ersichtlich, daß die totale T-Matrix analog wie in der Zwei-Potentialstreuung aus zwei Anteilen besteht: Einem reinen Schalenmodellanteil, der die Potentialstreuung des Schalenmodellpotentials beschreibt und

$$\delta_r = \delta_s = 0$$

und einem Teil, der die Effekte der Restwechselwirkung berücksichtigt, und im gewissen Sinne mikroskopisch sog. Compoundstreuung beschreibt. Es wird sich zeigen, daß die Zustände des Compoundsystems mittels der RPA-Theorie beschrieben werden.

Nun wird der direkte Zusammenhang zwischen dem Streuzustand in der Schalenmodellldarstellung und der renormierten linearen Antwortfunktion $\tilde{L}$ hergestellt. Dazu werden analog zu (C1.4) bis (C1.5) die folgenden Zustände (stehende Wellen) definiert:

$$|S\rangle := e^{i\delta_{p_i}} \Psi_{p,j}^{(+)} \quad (C1.15)$$

$$|S_o\rangle := e^{i\delta_{k_i}} \Phi_{k,i}^{(+)} \quad (C1.16)$$

$$|B_o\rangle := |\Phi_{r,i}\rangle \quad (C1.17)$$

Schreibt man sich die Definition (B3.11) der renormierten linearen Antwortfunktion auf

$$\tilde{L}_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(E) = -(Z_{\alpha} Z_{\beta} Z_{\alpha'} Z_{\beta'})^{-1/2} \langle 0 | \{ a_{\alpha'}^{\dagger} a_{\alpha} (E - H + i\eta)^{-1} a_{\beta'}^{\dagger} a_{\beta} - a_{\beta'}^{\dagger} a_{\beta} (E + H - i\eta) a_{\alpha'}^{\dagger} a_{\alpha} \} | 0 \rangle, \quad E \neq 0 \quad (C1.18)$$

und bildet sodann den Überlapp von $\langle S_o |$ und $\langle B_o |$ mit $|S\rangle$, so erhält man durch Vergleich mit (C1.18):

$$\langle S_o | S \rangle = -i\eta \tilde{L}_{kjpi}(E) \quad (C1.19)$$

und

$$\langle B_o | S \rangle = -i\eta \tilde{L}_{rjpi} \quad (C1.20)$$

Diese beiden Gleichungen geben den gesuchten Zusammenhang zwischen dem Streuzustand und der Antwortfunktion $\tilde{L}$. Das Streuproblem ist damit auf die Berechnung der renormierten linearen

Antwortfunktion $\tilde{L}$ reduziert, die ihrerseits die Kenntnis aller Teilchen-Loch-Amplituden und aller Anregungsenergien des A-Teilchensystems voraussetzt.

C2. Herleitung der vollen RPA-Gleichungen

aus der Bethe-Salpeter-Gleichung

Die Berechnung der benötigten renormierten linearen Antwortfunktion $\tilde{L}$, erfordert die Kenntnis über Teilchen-Loch-Amplituden und der Energiezustände des Compoundkernes. Man erhält diese aus der Bethe-Salpeter-Gleichung (B3.36) für $\tilde{L}$. Wegen der folgenden Diskussion wird sie nochmals in der Spektraldarstellung angegeben

$$-\sum_{|M| \neq 0} \left\{ \frac{\tilde{p}_{\alpha\alpha,M} \tilde{p}_{\beta\beta,M}^* \tilde{p}_{\beta\beta,M} \tilde{p}_{\alpha\alpha,M}^*}{E - E_M + i\eta} \frac{1}{E + E_M - i\eta} \right\} = (n_\alpha - n'_\alpha) \frac{(n_\alpha + n'_\alpha)}{E - \epsilon_\alpha + \epsilon'_\alpha - i\eta (n_\alpha - n'_\alpha)} \{ \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} + 2\pi \sum_{|M| \neq 0} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha\delta} \left(\frac{\tilde{p}_{\alpha\alpha,M} \tilde{p}_{\delta\delta,M}^*}{E - E_M + i\eta} - \frac{\tilde{p}_{\delta\delta,M} \tilde{p}_{\alpha\alpha,M}^*}{E + E_M - i\eta} \right) \} \quad (C2.1)$$

wobei $|M| >$ sowohl für die Bindungszustände $|B\rangle$, als auch für die Streuzustände $|S\rangle$ des A-Teilchensystems stehen.

Betrachtet man nun diese Gleichung an den Polstellen $E \rightarrow E_B$ ($E_B = \epsilon_\alpha - \epsilon'_\alpha$), so erhält man für die Residuen und Energien nach elementarer Umformung das Eigenwertproblem (Mig67, Weig69):

$$\{ E_B + \epsilon'_\alpha - \epsilon_\alpha - i\eta(n_\alpha - n'_\alpha) \} \tilde{p}_{\alpha\alpha,B} = -(n_\alpha - n'_\alpha) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha\delta} \tilde{p}_{\delta\delta,B} \quad (C2.2)$$

$$\{ -E_B + \epsilon'_\alpha - \epsilon_\alpha - i\eta(n_\alpha - n'_\alpha) \} \tilde{p}_{\alpha\alpha,B}^* = -(n_\alpha - n'_\alpha) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha\delta} \tilde{p}_{\delta\delta,B}^* \quad (C2.3)$$

$$\{ E_B + \epsilon'_\alpha - \epsilon_\alpha - i\eta(n_\alpha - n'_\alpha) \} \tilde{p}_{\alpha\alpha,B}^* = -(n_\alpha - n'_\alpha) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\delta\alpha\delta\alpha} \tilde{p}_{\delta\delta,B}^* \quad (C2.4)$$

$$\{ -E_B + \epsilon'_\alpha - \epsilon_\alpha - i\eta(n_\alpha - n'_\alpha) \} \tilde{p}_{\alpha\alpha,B} = -(n_\alpha - n'_\alpha) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\delta\alpha\delta\alpha} \tilde{p}_{\delta\delta,B} \quad (C2.5)$$

Für die Amplituden $\tilde{p}_{\alpha\alpha,S}$ erhält man durch analoge Überlegungen:

$$\{ E_S + \epsilon'_\alpha - \epsilon_\alpha - i\eta(n_\alpha - n'_\alpha) \} \tilde{p}_{\alpha\alpha,S} = -(n_\alpha - n'_\alpha) \{ \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\alpha\alpha} (-i\eta) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha\delta} \tilde{p}_{\delta\delta,S} \} \quad (C2.6)$$

Die Gleichungen (C2.4) und (C2.5) erhält man aus der transponierten Bethe-Salpeter-Gleichung.

Aus den Eigenwertgleichungen (C2.2), die unter dem Namen " Random-Phase-Gleichungen " bekannt sind, bestimmt man die Anregungsenergien und die Teilchen-Loch-Amplituden der Zustände $|B\rangle$ des Systems. Die Lösung des Gleichungssystems wird dadurch kompliziert, daß die Indizes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ auch über Zustände aus dem Kontinuum laufen, d.h. man hat mit einem System von Integralgleichungen zu tun. Die direkte Lösung des Problems mit realistischen Kräften stellt eine schwierige Aufgabe dar. Dieses Problem kann man dadurch vereinfachen, daß man für Potentialmatrixelemente, die Zustände aus dem Kontinuum enthalten, eine Summe von separablen Termen ansetzt. Da die Kopplung zwischen den diskreten Zuständen und dem Kontinuum wesentlich schwächer ist als die Kopplung zwischen den verschiedenen diskreten Zuständen, erscheint dies eine plausible Näherung. Weiterhin werden die scharfen Einteilchen-Resonanzen wie die diskreten Zustände behandelt, da diese eventuell stärker koppeln. Das Eigenwertproblem (C2.2) wird in zwei Schritten gelöst: Im ersten Schritt werden die RPA-Gleichungen unter Beschränkung des Einteilchenkonfigurationsraumes nur auf die diskreten Einteilchenzustände mit verschiedenen realistischen Kräften, die freie Parameter enthalten, gelöst (Strukturrechnung), wobei die Parameter an die experimentellen Daten (z.B. Energien) angepaßt werden. Anschließend werden aus der Strukturrechnung die Ergebnisse (Energien und Teilchen-Loch-Amplituden) derjenigen Kraft, die die experimentellen Daten am besten reproduzieren, zur Lösung der RPA-Gleichungen mit Kontinuum unter Verwendung einer separablen Kraft herangezogen. Die Hinzunahme des Kontinuums bewirkt eine

Verschiebung der Strukturenergien. Dadurch rücken alle Struktur-
energien, die oberhalb der Schwelle liegen, in die komplexe
Energieebene.

Diese Methode ist dadurch motiviert, daß man einerseits die
Energieverschiebung und Breiten wesentlich einfacher bestimmen
kann als bei den üblichen Methoden (Vog72, Kim73) und anderer-
seits einen direkten Vergleich zwischen der Strukturrechnung
und der RPA-Gleichungen mit Kontinuum herstellen kann und da-
mit den Einfluß des Kontinuums unmittelbar ablesen kann.

Für die weitere Diskussion (z.B. die Normierungsbedingung der
Systemzustände) ist es günstig die historische Form, in der die
angeregten Zustände des Compoundsystems durch den Quasibosonen-
operator $\hat{Q}_M^\dagger$ dargestellt wurden, kurz zu schildern:

$$\hat{Q}_M^\dagger = \sum_r \sqrt{Z_r} Z_r^{-1} \{ x_{ri}^\dagger a_i - y_{ri}^\dagger a_i^\dagger a_r \} + \sum_{ki} \sqrt{Z_k} Z_k^{-1} \{ x_{ki}^\dagger a_k - y_{ki}^\dagger a_i^\dagger a_k \} \quad (C2.7)$$

Der erste Term erzeugt Teilchen-Loch-Paare der zweite Term ver-
nichtet Teilchen-Loch-Paare. Der korrelierte Grundzustand
wird durch die Forderung, daß es keine Anregungen enthalten
darf, die durch $\hat{Q}_M^\dagger$ erzeugt werden, definiert:

$$\hat{Q}_M |0\rangle = 0 \quad (C2.8)$$

Es wird also angenommen, daß die Zustände

$$|M\rangle = \hat{Q}_M^\dagger |0\rangle \quad (C2.9)$$

approximativ Eigenzustände des vollen Hamiltonoperators H sind.

Die zugehörigen Eigenwerte sind E_M . Der Operator $\hat{Q}_M^\dagger$ erfüllt
die Eigengleichung

$$[H, \hat{Q}_M^\dagger] = E_M \hat{Q}_M^\dagger \quad (C2.10)$$

Die Grundzustandsenergie $E_0^{(A)}$ wurde wie oben gleich Null ge-
setzt:

Die Bestimmung der Koeffizienten $x_{\alpha\alpha'}^M$ und $y_{\alpha\alpha'}^M$ reduziert sich auf ein Variationsproblem nach diesen Koeffizienten. Unter der Gültigkeit der Annahme der Quasibosonennäherung erhält man schließlich ein algebraisches Gleichungssystem für die Amplituden $x_{\alpha\alpha'}^B$ und $y_{\alpha\alpha'}^B$. Dieses Gleichungssystem stimmt mit dem Eigenwertproblem (C2.2) überein. Man muss dabei beachten, daß in der Quasibosonennäherung für die Amplituden $x_{\alpha\alpha'}^M, y_{\alpha\alpha'}^M$

$$x_{\alpha\alpha'}^M = \langle M | a_{\alpha\alpha'}^\dagger | 0 \rangle = (Z_\alpha Z_{\alpha'})^{1/2} \tilde{p}_{\alpha\alpha'}^*, (\alpha\alpha') \in \{(ri), (ki)\} \quad (C2.11)$$

und

$$y_{\alpha\alpha'}^M = \langle M | a_{\alpha\alpha'} | 0 \rangle = (Z_\alpha Z_{\alpha'})^{1/2} \tilde{p}_{\alpha\alpha'}^*, (\alpha\alpha') \in \{(ir), (ik)\} \quad (C2.12)$$

zu schreiben ist.

C3. Die konventionellen RPA-Gleichungen

Es wird nun der Fall untersucht, daß in der Beziehung (C2.7) die Indizes α, α' nur das diskrete Spektrum des Einteilchen-schalenmodellhamiltonoperators H_s durchläuft. Zustände aus dem Kontinuum, die einen scharfen Einteilchen-Resonanz enthalten, werden, wie bereits oben erwähnt, zu den diskreten Zuständen gezählt. Der volle Hamiltonoperator H , der unter dieser Einschränkung keine Streuzustände mit Teilchenzuständen aus dem gebundenen Anteil von H_s besitzt, wird nun in diesem endlich-dimensionalen Unterraum diagonalisiert (Bro61, Han69). Die Anregungszustände $|B\rangle$ in dieser Näherung bezeichnen wir mit $|n\rangle$. Man erhält sie aus der Diagonalisierung von H im soeben erwähnten endlichdimensionalen Unterraum. Entsprechend werden in

dieser Näherung die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$ durch $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}^+$, die Energien E_B durch E_n und der Quasibosonenoperator $\hat{Q}_B$ durch $\hat{Q}_n$ bezeichnet. Für $\hat{Q}_n$ erhält man aus (C2.7) unter Berücksichtigung von (C2.11) und (C2.12):

$$\hat{Q}_n = \sum_{r,i} \{ \tilde{\rho}_{r,i,n}^\dagger a_i - \tilde{\rho}_{i,r,n}^\dagger a_r \} \quad (C3.1)$$

Für den Zustand $|n\rangle$, der sich aus der obigen Prozedur ergibt,

lässt sich schreiben:

$$|n\rangle = \hat{Q}_n^\dagger |0\rangle \quad (C3.2)$$

Das RPA-Gleichungssystem (C2.2) geht durch die obige Einschränkung über den Unterraum in

$$\{E_n + \epsilon_\alpha - \epsilon_\alpha\} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} = -(\eta_\alpha - \eta_\alpha) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta\alpha\delta'} \cdot \tilde{\rho}_{\delta\delta',n} \quad (C3.3)$$

über. Dieses Gleichungssystem stellt das Standard-RPA-Gleichungssystem dar. Wegen der folgenden Diskussion wird (C3.3) auf eine Matrixform gebracht. Zu diesem Zwecke wird Gleichung (C3.3) zunächst ausführlich geschrieben. Man erhält

$$\{E_n + \epsilon_i - \epsilon_r\} \tilde{\rho}_{r,i,n} = 2\pi \sum_{sj} \{ \tilde{I}_{rjis} \cdot \tilde{\rho}_{sj,n} + \tilde{I}_{rsij} \cdot \tilde{\rho}_{js,n} \} \quad (C3.4)$$

und

$$\{E_n + \epsilon_r - \epsilon_i\} \tilde{\rho}_{i,r,n} = -2\pi \sum_{sj} \{ \tilde{I}_{ijrs} \cdot \tilde{\rho}_{sj,n} + \tilde{I}_{isrj} \cdot \tilde{\rho}_{js,n} \} \quad (C3.5)$$

woraus sich nach elementarer Umformung die folgenden Gleichungen ergibt:

$$\sum_{sj} \{ [\delta_{ij} \delta_{rs} (\epsilon_r - \epsilon_i) + 2\pi \tilde{I}_{rjis}] \tilde{\rho}_{sj,n} + 2\pi \tilde{I}_{rsij} \cdot \tilde{\rho}_{js,n} \} = E_n \tilde{\rho}_{ri,n} \quad (C3.6)$$

$$\sum_{sj} \{ -\tilde{I}_{ijrs} \cdot \tilde{\rho}_{sj,n} - [\delta_{ij} \delta_{rs} (\epsilon_r - \epsilon_i) + 2\pi \tilde{I}_{isrj}] \tilde{\rho}_{js,n} \} = E_n \tilde{\rho}_{ir,n} \quad (C3.7)$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man schließlich die gewünschte Matrixform von (C3.3):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_n \\ \tilde{\rho}_n^* \end{bmatrix} = E_n \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_n \\ \tilde{\rho}_n^* \end{bmatrix} \quad (C3.8)$$

Dieses Eigenwertproblem wird nun mit verschiedenen Wechselwirkungen mit freien Parametern gelöst, die an das Experiment angepaßt werden. Die Eigenwerte E_n und die Eigenvektoren $\tilde{\rho}_n$ von denen im folgenden die Rede sein wird, sind die Ergebnisse aus diesem Verfahren. Die allgemeinen Eigenschaften von (C3.8) werden im nächsten Abschnitt (C4) besprochen.

Die folgenden Gleichungen definieren die in (C3.8) verwendeten Abkürzungen:

$$A_{(ri,sj)} := \delta_{ij} \delta_{rs} (\epsilon_r - \epsilon_i) + 2\pi \tilde{I}_{rjis} \quad (C3.9)$$

$$B_{(ri,sj)} := 2\pi \tilde{I}_{rsij} \quad (C3.10)$$

$$\tilde{I}_{ijrs} := \tilde{I}_{rsij}^* \quad (C3.11)$$

$$(\tilde{\rho}_n)_{ri} := \tilde{\rho}_{ri,n} \quad ; \quad (\tilde{\rho}_n)_{ri} := \tilde{\rho}_{ir,n} \quad (C3.12)$$

C4. Allgemeine Eigenschaften der konventionellen RPA

Die Standard-RPA-Matrix C, definiert durch

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ -A^* & -B^* \end{pmatrix} \quad (C4.1)$$

besteht, wie man sieht aus zwei Block-Matrizen A und B. Aus den Beziehungen (C3.9) bis (C3.11) folgt, daß A hermitesch und B symmetrisch ist, d.h.

$$A^\dagger = A^* = A \quad ; \quad B^\dagger = B \quad (C4.2)$$

Die volle Matrix C ist dagegen nicht hermitesch und daher sind komplexe Eigenwerte E_n nicht auszuschließen. Nur reelle, positive Eigenwerte entsprechen physikalisch sinnvollen Anregungszuständen des Systems. Thouless konnte im Rahmen der Hartree-Fock-Theorie zeigen (Tho61, Tho64), daß in einer stabilen, selbstkonsistenten Hartree-Fock-Basis alle E_n reell sind.

Fast alle Näherungen der Kernphysik sind mit Invarianzverletzungen erkaufte. Im Schalenmodell ist z.B. die Translationsinvarianz verletzt. Dies rührt her von der Auszeichnung eines bestimmten Rumpunktes, an den man das Schalenmodellpotential setzt, was im Widerspruch zur Homogenität des Raumes steht. Die unangenehmste Folge dieses Vorgehens ist das Auftreten von Geisterzuständen. Die Anregungsspektren, die man mit solch einem Modell berechnet, werden durch das Auftreten dieser Geisterzustände verfälscht. Eine wesentliche Eigenschaft der RPA ist, daß die Anregungsenergien dieser Scheinzustände sich zu Null ergeben. Im Rahmen des zeitabhängigen Hartree-Fock-Verfahrens kann man dieses Ergebnis so deuten, daß für gewisse kollektive Bewegungen keine rücktreibende Kraft besteht. Solche Scheinanregungen sind in der RPA mit dem Grundzustand entartet. Das Auftreten einer Anregungsenergie E_n exakt gleich Null, als Ausdruck für das Vorhandensein der Geisterzustände, ist nur dann gewährleistet, wenn die Einteilchenzustände und die Einteilchenenergien durch die Selbstkonsistenzprozedur aus den Hartree-Fock-Gleichungen berechnet werden und die volle Basis verwendet wird. Wegen der Nichtlokalität des Potentials ist dies jedoch eine sehr aufwendige und zugleich schwierige Aufgabe, die man durch die Vorgabe eines lokalen phänomenologischen Einteilchenpotentials umgeht. Dadurch wird nicht mehr gewährleistet, daß für den Geisterzustand die Energie Null ergibt. Weiterhin muss im Prinzip die gleiche Wechselwirkung wie in der Hartree-Fock-Rechnung verwendet werden.

Die Normierungsbedingung für den Zustand $|\eta\rangle$ erhält man aus (C3.2)

unter Berücksichtigung von (C3.1). Für die Teilchen-Loch-Amplituden ergibt dies die folgende Normierungsbeziehung:

$$\langle n|n \rangle = \delta_{nn} \text{sign}(E) = \sum_i \{ \tilde{p}_{ri,n} \tilde{p}_{ri,n}^* - \tilde{p}_{li,n} \tilde{p}_{li,n}^* \}, \quad \text{sign}(0) = 0, \quad (C4.3)$$

Zuletzt sei noch erwähnt, daß die Teilchen-Loch-Amplituden zu den negativen Energien $E = -E_n$, die symmetrisch zu $E = E_n$ liegen, aus Symmetriegründen durch die Amplituden zu den positiven Energien ausdrückbar sind. Man erhält:

$$\tilde{p}_{\alpha\alpha',n} = e^{i\varphi_n} \tilde{p}_{\alpha\alpha',n}^*, \quad (\alpha\alpha') \in \{(ri), (lr)\} \quad (C4.4)$$

wobei $-n$ auf die negative Energie hinweist und $\varphi_n \in \mathbb{R}$ ist.

C5. Erweiterung der konventionellen RPA

durch Hinzunahme des Kontinuums

In diesem Abschnitt wird versucht, das Kontinuum unter Ein-
schluß der Strukturrechnung in die RPA einzubeziehen. Hierzu
macht man sich folgende bereits erwähnte Tatsache zu Nutzen: Die
Kopplung zwischen den diskreten Zuständen und dem Kontinuum ist
wesentlich schwächer als die Kopplung zwischen den verschiedenen
diskreten Zuständen. Dies gilt jedoch nicht für solche Zustände
aus dem Kontinuum, die eine Einteilchen-Resonanz enthalten;
diese Zustände werden wie die diskreten Zustände behandelt. We-
gen der stärkeren Kopplung werden die konventionellen RPA-Glei-
chungen mit einer "besseren Kraft" gelöst. Die schwächere Kop-
plung zwischen den kontinuierlichen und gebundenen Zuständen
werden dagegen mit einer "einfacheren Kraft" berücksichtigt.

Als "einfachere Kräfte" empfehlen sich alle separablen Kräfte, also auch die "Surface Delta Interaction (SDI)", (Let66, Gre65, Mos65, Eis65) mit der die Kontinuumsrechnungen bei dieser Arbeit durchgeführt werden. Für die weitere Rechnung wird angenommen, daß die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}$, die Energien E_n und die Zustände $|n\rangle$ im Sinne der "bestmöglichen Ergebnisse" aus der Diagonalisierung von (C3.8) vorliegen. durch den Einschluß des Kontinuums in die RPA-Rechnungen werden sowohl die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}$ als auch die Energien E_n verändert. Durch die Hinzunahme des Kontinuums werden die Strukturenergien E_n wie folgt verschoben:

$$E_n \longrightarrow E_M = \begin{cases} E_B = E + \Delta E_n \\ E_S = E + \tilde{\Delta E}_n - i\Gamma/2 \end{cases}$$

Die entsprechende Verschiebung für den Zustand $|n\rangle$ und die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}$ lautet:

$$|n\rangle \longrightarrow |M\rangle = \begin{cases} |B\rangle \\ |S\rangle \end{cases} ; \quad \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \longrightarrow \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,B}$$

Das Ziel ist nun die veränderten Teilchen-Loch-Amplituden und die verschobenen Energien zu berechnen. Somit werden durch das dargestellte Verfahren u.a. der Einfluß des Kontinuums quantitativ separiert. Hirdurch kann man abschätzen, wie gut Standardkernstrukturrechnungen sind.

Als erstes werden die veränderten Amplituden der Form $\tilde{\rho}_{ri,M}$ und $\tilde{\rho}_{ir,M}$ berechnet. Bekanntlich bilden die Eigenvektoren $\tilde{\rho}_n$ eine vollständige Orthogonalbasis im Teilchenraum. Daher kann man den Eigenvektor $\tilde{\rho}_M$ als Linearkombination dieser Vektoren darstellen. In komponentenschreibweise heisst das:

$\ddagger$
E: Energie des geb. Zustandes; E_S : Energie des Streuzustandes.

$$\tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},M} = \sum_n \{ A_n^M \tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},n}^* + B_n^M \tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},n} \}, \quad (\alpha\dot{\alpha}) \in \{(ri), (ir)\} \quad (C5.1)$$

Für die zu berechnenden Koeffizienten A_n^M und B_n^M erhält man unter Berücksichtigung der Orthonormalitätsbeziehung, (C4.3) die folgenden Beziehungen:

$$A_n^M = \sum_{\lambda\lambda'} (n_{\lambda'} - n_{\lambda}) \tilde{\rho}_{\lambda\lambda',n} \tilde{\rho}_{\lambda\lambda',M} \quad (C5.2)$$

$$B_n^M = \sum_{\lambda\lambda'} (n_{\lambda'} - n_{\lambda}) \tilde{\rho}_{\lambda\lambda',n}^* \tilde{\rho}_{\lambda\lambda',M} \quad (C5.3)$$

Diese beiden Gleichungen haben nur eine formale Bedeutung, da beide Gleichungen die noch unbekannten Amplituden $\tilde{\rho}_{\lambda\lambda',M}$ enthalten und daher zur Berechnung der Koeffizienten A_n^M und B_n^M nicht geeignet sind. Die Frage nach einer geeigneten Gleichung zur Bestimmung der Größen A_n^M und B_n^M wird im Moment zurückgestellt und stattdessen wird versucht diese als Matricelemente des Quasibosonenoperators $\hat{Q}_n$ darzustellen, da dies für die praktische Rechnung nützlich ist. Bildet man die Matricelemente $\langle 0 | \hat{Q}_n^{\dagger} | M \rangle$ und $\langle 0 | \hat{Q}_n | M \rangle$, so kann man unter Berücksichtigung der Gleichungen (C3.1) und (C2.8) schreiben:

$$\langle 0 | \hat{Q}_n^{\dagger} | M \rangle = \sum_{v v'} (n_v - n_{v'}) \tilde{\rho}_{v v',n} \tilde{\rho}_{v v',M} \quad (C5.4)$$

$$\langle 0 | \hat{Q}_n | M \rangle = \sum_{v v'} (n_v - n_{v'}) \tilde{\rho}_{v v',n}^* \tilde{\rho}_{v v',M} \quad (C5.5)$$

Der Vergleich von (C5.4) und (C5.5) mit (C5.2) und (C5.3) ergibt die gewünschte Darstellung von A_n^M und B_n^M als Matricelemente des Operators $\hat{Q}_n$:

$$A_n^M = \langle 0 | \hat{Q}_n^{\dagger} | M \rangle \quad (C5.6)$$

$$B_n^M = \langle 0 | \hat{Q}_n | M \rangle \quad (C5.7)$$

Damit geht Gleichung (C5.1) über in

$$\tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},M} = \sum_n \{ \langle 0 | \hat{Q}_n^{\dagger} | M \rangle \tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},n}^* + \langle 0 | \hat{Q}_n | M \rangle \tilde{\rho}_{\alpha\dot{\alpha},n} \}, \quad (\alpha\dot{\alpha}) \in \{(ri), (ir)\} \quad (C5.8)$$

Bevor nun die Matricelemente $\langle 0 | \hat{Q}_n^{\dagger} | M \rangle$ bzw. $\langle 0 | \hat{Q}_n | M \rangle$ berechnet werden, werden in den nachfolgenden Gleichungen eingehenden Abkürzungen

durch folgenden Vereinbarungen erläutert:

$$\sum'_{\alpha\alpha'} f_{\alpha\alpha'} := \sum_{rj} \{ f_{rj} + f_{jr} \} \quad (C5.9)$$

$$\sum'_{\alpha\alpha'} f_{\alpha\alpha'} := \sum_{ki} \{ f_{ki} + f_{ik} \} \quad (C5.10)$$

Dabei ist $f_{\alpha\alpha'}$ eine beliebige Funktion von α, α' . Für die Matrixelemente $\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle$ und $\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle$ erhält man aus (C2.2) und (C3.3) unter Berücksichtigung der Definitionen (C5.9) und (C5.10):

$$\{ E_n + E_M \} \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = -2\pi \sum'_{\nu\nu'} \sum''_{l'l'} \tilde{p}_{\nu\nu',n} \tilde{I}_{\nu\nu',l} \tilde{p}_{l'l',M} \quad (C5.11)$$

$$\{ E_n - E_M \} \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = -2\pi \sum'_{\nu\nu'} \sum''_{l'l'} \tilde{p}_{\nu\nu',n} \tilde{I}_{\nu\nu',l} \tilde{p}_{l'l',M} \quad (C5.12)$$

In diesen beiden Gleichungen läuft entweder l oder l' über kontinuierliche Zustände. Da die Kopplung zwischen diskreten und kontinuierlichen Zuständen schwach ist, wird für die Teilchen-Loch-Wechselwirkung I mit einem Zustand aus dem Kontinuum eine Summe von separablen Termen angesetzt:

$$2\pi \tilde{I}_{\nu\nu',l} = D w_{\nu\nu'} w_{l'l} + K v_{\nu\nu'} v_{l'l} \quad (C5.13)$$

Die Parameter D und K bestimmen die Stärke der Restwechselwirkung. Mit diesem separablen Ansatz für die Teilchen-Loch-Wechselwirkung lassen sich die Gleichungen (C5.11) und (C5.12) beträchtlich vereinfachen. Man erhält folgende Ausdrücke:

$$\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = - \{ D E_{1n} E_{1M} + K E_{2n} E_{2M} \} / (E_n + E_M) \quad (C5.14)$$

$$\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = - \{ D E_{1n}^* E_{1M} + K E_{2n}^* E_{2M} \} / (E_n - E_M) \quad (C5.15)$$

wobei die in den Klammern stehende Hilfsgrößen durch die nachstehenden Gleichungen definiert sind:

$$E_{1n} = \sum'_{\nu\nu'} \tilde{p}_{\nu\nu',n} w_{\nu\nu'} \quad (C5.16)$$

$$E_{2n} = \sum'_{\nu\nu'} \tilde{p}_{\nu\nu',n} v_{\nu\nu'} \quad (C5.17)$$

$$E_{1M} = \sum''_{l'l'} \tilde{p}_{l'l',M} w_{l'l} \quad (C5.18)$$

$$E_{2M} = \sum''_{l'l'} \tilde{p}_{l'l',M} v_{l'l} \quad (C5.19)$$

✧

Zur genaueren Herleitung der Gleichungen dieses Abschnitts siehe Anhang I.

Die Hilfsgrößen F_{1n} und F_{2n} sind durch die Struturrechnung gegeben;

F_{1M} , F_{2M} und E_M sind noch unbekannt. Zur Berechnung der Hilfsgrößen

F_{1M} und F_{2M} benötigt man aber wie man aus (C5.18) und (C5.19)

sieht, die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{li,M}$ mit $(li) \in \{(ki), (ik)\}$. Daher

müssen Teilchen-Loch-Amplituden der Form $\tilde{\rho}_{ki,M}$ und $\tilde{\rho}_{ik,M}$ mit $|M\rangle = |B\rangle$

oder $|M\rangle = |S\rangle$ berechnet werden. Zuerst werden die Amplituden für

$|M\rangle = |B\rangle$ berechnet und anschließend für $|M\rangle = |S\rangle$.

Die Kontinuum-Bound-Amplituden $\tilde{\rho}_{ki,B}$ und $\tilde{\rho}_{ik,B}$ erhält man aus (C2.2)

unter Berücksichtigung der Gleichungen (C5.13) bis (C5.19):

$$\tilde{\rho}_{ki,B} = (E_B + \epsilon_i - \epsilon_k + i\eta)^{-1} \{ D w_{ki} F_{1B} [1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)] + K v_{ki} F_{2B} [1 - K \sum_n |F_{2n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)] - DK \sum_n \{ w_{ki,2B,1n,2n} [F_{1n}^* F_{1B} / (E_n + E_B) + F_{1n}^* F_{1B} / (E_n - E_B)] + v_{ki,1B,1n,2n} [F_{2n}^* F_{1B} / (E_n + E_B) + F_{2n}^* F_{1B} / (E_n - E_B)] \} \} \quad (C5.20)$$

$$\tilde{\rho}_{ik,B} = -(E_B + \epsilon_k - \epsilon_i)^{-1} \{ D w_{ik,1B} [1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)] + K v_{ik,2B} [1 - K \sum_n |F_{2n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)] - DK \sum_n \{ w_{ik,2B,1n,2n} [F_{1n}^* F_{1B} / (E_n + E_B) + F_{1n}^* F_{1B} / (E_n - E_B)] + v_{ik,1B,1n,2n} [F_{2n}^* F_{1B} / (E_n + E_B) + F_{2n}^* F_{1B} / (E_n - E_B)] \} \} \quad (C5.21)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich mit den Hilfsgrößen

$$f_{1,ad}^{ad}(E) = D w_{ad} [1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E^2)] - DK v_{ad} \sum_n [F_{1n}^* F_{1B} / (E_n + E) + F_{1n}^* F_{1B} / (E_n - E)] \quad (C5.22)$$

$$f_{2,ad}^{ad}(E) = K v_{ad} [1 - K \sum_n |F_{2n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E^2)] - DK w_{ad} \sum_n [F_{2n}^* F_{1B} / (E_n + E) + F_{2n}^* F_{1B} / (E_n - E)] \quad (C5.23)$$

$$\text{und} \quad f_{ad}^{ad}(E) = E + \epsilon_a - \epsilon_a - i\eta(n_a - n_a) \quad (C5.24)$$

auf die folgende kompakte Form umschreiben:

$$\tilde{\rho}_{ki,B} = f_{ki}^{ad}(E) \left\{ f_{1B,1B}^{ki}(E) F_{1B} + f_{2B,2B}^{ki}(E) F_{2B} \right\} \quad (C5.25)$$

$$\tilde{\rho}_{ik,B} = -f_{ik}^{ad}(E) \left\{ f_{1B,1B}^{ik}(E) F_{1B} + f_{2B,2B}^{ik}(E) F_{2B} \right\} \quad (C5.26)$$

Die Amplituden $\tilde{\rho}_{ki,B}$ bzw. $\tilde{\rho}_{ik,B}$ sind also auch bekannt, wenn man

F_{1B} und F_{2B} kennt. Um F_{1B} und F_{2B} zu berechnen, werden diese beiden

Gleichungen in den Definitionsgleichungen (C5.18) und (C5.19)

eingesetzt. Nach elementarer Umformung erhält man daraus das

folgende homogene Gleichungssystem für F_{1B} und F_{2B} :

$$\begin{pmatrix} 1 - D_{11}(E_B) & -D_{12}(E_B) \\ -D_{21}(E_B) & 1 - D_{22}(E_B) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{1B} \\ F_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C5.27)$$

Bekanntlich hat ein homogenes Gleichungssystem nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der betreffenden Matrix gleich Null wird, also:

$$\Delta(E_B) = 0 \quad (C5.2)$$

mit

$$\Delta(E) = \text{DET} \begin{pmatrix} 1 - D_{11}(E) & -D_{12}(E) \\ -D_{21}(E) & 1 - D_{22}(E) \end{pmatrix} \quad (C5.29)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Bindungsenergien des Compound-systems die Nullstellen der Determinanten sind. Später wird noch explizit gezeigt, daß -wie zu erwarten- auch die Resonanzenergien des Compoundsystems aus (C5.28) berechnet werden. Man nennt eine Beziehung wie (C5.28) die Energiedispersionsrelation. Durch die separablen Kräfte hat man also die Lösung der Integralgleichungen auf die Lösung einer algebraischen Beziehung zurückgeführt.

Um die Eigenschaften der Determinanten genauer studieren zu können, braucht man die Größen $D_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, 2$). Diese sind definiert durch:

$$D_{11}(E) = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) f_{\alpha\alpha'}^{-1}(E) w_{\alpha\alpha'} f_1^{\alpha\alpha'}(E) \quad (C5.30)$$

$$D_{12}(E) = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha\alpha'}^{-1}(E) w_{\alpha\alpha'} f_2^{\alpha\alpha'}(E) \quad (C5.31)$$

$$D_{21}(E) = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha\alpha'}^{-1}(E) v_{\alpha\alpha'} f_1^{\alpha\alpha'}(E) \quad (C5.32)$$

$$D_{22}(E) = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha\alpha'}^{-1}(E) v_{\alpha\alpha'} f_2^{\alpha\alpha'}(E) \quad (C5.33)$$

Die hier durch $\bar{f}_{\alpha\alpha'}^{-1}(E)$ auftretenden Hauptwertintegrale reduzieren sich für die Bindungsenergien $E = E_B$ auf ganz normale Integrale:

Die Bindungsenergien E_B liegen ja unterhalb der Energieschwelle, die durch $E = -\varepsilon_i$ gegeben ist. Die Pole von $D_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, 2$) und damit die Pole der Dispersionsrelation, die über die Hilfsgrößen

$f_{\mu}^{\alpha\alpha}$ ($\mu=1,2$) hereinkommen, liegen symmetrisch verteilt bei den Energien $E=E_n$ und $E=-E_n$. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Pole wechseln alle $D_{v\mu}$ ($v,\mu=1,2$) ihr Vorzeichen. Daher müssen die Bindungsenergien E_B als Nullstellen der Dispersionsrelation zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Pole liegen.

Nun zurück zu den Hilfsgrößen F_{1B} und F_{2B} . Aus der Gleichung

(C5.27) erhält man für F_{2B} :

$$F_{2B} = \frac{1 - D_{11}(E_B)}{D_{12}(E_B)} F_{1B} \quad (C5.34)$$

Man kann also F_{2B} berechnen, wenn man F_{1B} kennt. Man berechnet $|F_{1B}|$ aus der Normierungsbedingung $\langle B|B \rangle = 1$. Unter Berücksichtigung von (C5.34) erhält man:

$$\begin{aligned} |F_{1B}|^2 = & \left\{ \sum_n \left[|D \sum_n (F_{1n} \tilde{\rho}^* / (E_n + E_B) + F_{1n} \tilde{\rho} / (E_n - E_B)) + K(1 - D_{11}(E_B)) / D \sum_n (F_{1n} \tilde{\rho}^* / (E_n + E_B) \right. \right. \\ & \left. \left. + F_{1n} \tilde{\rho} / (E_n - E_B)) \right|^2 - \left| D \sum_n (F_{1n} \tilde{\rho}^* / (E_n + E_B) + F_{1n} \tilde{\rho} / (E_n - E_B)) + K(1 - D_{11}(E_B)) / D_{12}(E_B) \right|^2 \right. \\ & \left. + \sum_n (F_{1n} \tilde{\rho}^* / (E_n + E_B) + F_{1n} \tilde{\rho} / (E_n - E_B))^2 \right] + \sum_{ki} \left[|D w_{ki} / (E_B + \epsilon_i - \epsilon_k) (1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 E_n / (E_n^2 - E_B^2)) \right. \\ & \left. + K v_{ki} / (E_B + \epsilon_i - \epsilon_k) (1 - D_{11}(E_B)) / D_{12}(E_B) (1 - K \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)) - DK \right. \\ & \left. w_{ki} / (E_B + \epsilon_i - \epsilon_k) (1 - D_{11}(E_B)) / D_{12}(E_B) \sum_n (F_{1n}^* F_{1n} / (E_n + E_B) + F_{1n} F_{1n}^* / (E_n - E_B)) - DK v_{ki} / (E_B + \right. \\ & \left. + \epsilon_i - \epsilon_k) \sum_n (F_{1n}^* F_{1n} / (E_n + E_B) + F_{1n} F_{1n}^* / (E_n - E_B)) \right|^2 - D w_{ik} / (E_B + \epsilon_k - \epsilon_i) (1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 E_n / (E_n^2 - E_B^2)) \\ & \left. + K v_{ik} / (E_B + \epsilon_k - \epsilon_i) (1 - D_{11}(E_B)) / D_{12}(E_B) (1 - K \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E_B^2)) - DK w_{ik} / (E_B + \epsilon_k - \epsilon_i) \right. \\ & \left. (1 - D_{11}(E_B)) / D_{12}(E_B) \sum_n (F_{1n}^* F_{1n} / (E_n + E_B) + F_{1n} F_{1n}^* / (E_n - E_B)) - DK v_{ik} / (E_B + \epsilon_k - \epsilon_i) \sum_n (F_{1n}^* F_{1n} / (E_n + E_B) + F_{1n} F_{1n}^* / (E_n - E_B)) \right|^2 \right] \} \end{aligned} \quad (C5.35)$$

F_{1B} ist nun bis auf einen Phasenfaktor bestimmt. Der Phasenfaktor ergibt sich aus der Forderung, daß F_{1B} in F_{1n} übergehen muss, wenn das Kontinuum fortgelassen wird:

$$F_{1B} = |F_{1B}| F_{1n} / |F_{1n}| \quad (C5.36)$$

Damit sind nun alle Größen, die zur Berechnung der Bindungszustände und Bindungsenergien benötigt werden, vollständig bestimmt.

Als Nächstes gilt der Augenmerk der Bestimmung der Teilchen-Loch-Amplituden für die Streuzustände des Compoundsystems. Um die Hilfsgrößen F_{1S} und F_{2S} zu bestimmen, müssen die Teilchen-Loch-Amplituden $\tilde{\rho}_{ki,S}$ und $\tilde{\rho}_{ik,S}$ berechnet werden. Für diese erhält man aus der Gleichung (C2.6) unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (C5.18), (C5.19) sowie (C5.22) bis (C5.24):

$$\tilde{\rho}_{ki,S} = \delta_{kp} \delta_{ij} + f_{ki}^{(E)} \{ f_{1S}^{ki}(E) F_{1S} + f_{2S}^{ki}(E) F_{2S} \} \quad (C5.37)$$

$$\tilde{\rho}_{ik,S} = - f_{ik}^{(E)} \{ f_{1S}^{ik}(E) F_{1S} + f_{2S}^{ik}(E) F_{2S} \} \quad (C5.38)$$

Einsetzen dieser beiden Lösungen in den beiden Definitionsgleichungen (C5.18) und (C5.19) für F_{1S} und F_{2S} liefert das inhomogene Gleichungssystem zur Berechnung von F_{1S} und F_{2S} :

$$\begin{pmatrix} 1 - D_{11}^{(E)} & -D_{12}^{(E)} \\ -D_{12}^{(E)} & 1 - D_{22}^{(E)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{1S} \\ F_{2S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{pj} \\ v_{pj} \end{bmatrix} \quad (C5.39)$$

woraus man für F_{1S} und F_{2S} folgende Ausdrücke erhält:

$$F_{1S} = \{ w_{pj} (1 - D_{22}^{(E)}) + v_{pj} D_{12}^{(E)} \} / \Delta(E) \quad (C5.40)$$

$$F_{2S} = \{ v_{pj} (1 - D_{11}^{(E)}) + w_{pj} D_{12}^{(E)} \} / \Delta(E) \quad (C5.41)$$

Damit sind nun alle Größen die zur Hinzunahme des Kontinuums in die RPA-Rechnungen benötigt wurden, explizit berechnet. Wie explizit ersichtlich ist, wird auch hier durch die separablen Kräfte die Lösung des Integralgleichungssystems durch einfache algebraische Methoden ersetzt.

C6. Explizite Berechnung der T-Matrix

Für die renormierte Streulösung des vollen Hamiltonoperators H und damit des vollen Streuproblems ergibt die Lippmann-Schwinger-Gleichung (s. (C1.7) bis (C1.9)):

$$|\Psi_{p,j}^{(+)}\rangle = |\phi_{p,j}^{(+)}\rangle + \frac{1}{E - H + i\eta} (H - E) |\Psi_{p,j}^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_{p,j}^{(+)}\rangle \quad (\eta \rightarrow 0^+) \quad (C6.1)$$

mit

$$|\phi_{p,j}^{(+)}\rangle = (Z_p Z_j)^{-1/2} e^{i\delta_p} a_j^\dagger |0\rangle \quad (C6.2)$$

wobei $|\phi_{p,j}^{(+)}\rangle$ die renormierte Streulösung des Schalenmodellhamiltonoperators H_0 (H ohne Restwechselwirkung V) ist. Aus (C6.1) und (C6.2) erhält man für den Streuzustand in der Schalenmodell-darstellung auf der Energieschale (s. auch (C1.13)):

$$\langle \phi_{ki}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(+)} \rangle = S_{kp}^S \delta_{ij} + \frac{1}{E_{pj} - E_{ki} + i\eta} T_{ki,pj}^R \quad (C6.3)$$

Daraus ist ersichtlich, daß die totale T-Matrix aus einem Potentialanteil (Gol64) und einem Resonanzanteil besteht. Die S-Matrix ist gegeben durch:

$$S_{ki,pj} = \langle \phi_{ki}^{(-)} | \Psi_{p,j}^{(+)} \rangle \quad (C6.4)$$

Explizit erhält man daraus für die S-Matrix auf der Energieschale (Weig69, Weig70):

$$S_{ki,pj}(E_{pj}) = e^{2i\delta_p} \delta_{kp} \delta_{ij} e^{-2\pi i \delta(E_{pj} - E_{ki})} T_{ki,pj}^R(E_{pj}) \quad (C6.5)$$

Zur expliziten Berechnung von $T_{ki,pj}^R$ geht man vom folgenden Ausdruck aus:

$$\tilde{p}_{ki,S} = (Z_k Z_i)^{-1/2} \langle 0 | a_k^\dagger | S \rangle \quad (C6.6)$$

Setzt man hier (C6.1) ein, so erhält man nach elementarer Umformung die Beziehung

$$\tilde{p}_{ki,S} = e^{-i(\delta_p + \delta_k)} \left[\langle \phi_{ki}^{(-)} | \phi_{ki}^{(+)} \rangle + \frac{1}{E - E_{ki} + i\eta} T_{ki,pj}^R(E) \right] \quad (C6.7)$$

woraus sich für $T_{ki,pj}^R$ nach trivialer Rechnung ergibt:

$$T_{ki,pj}^R(E) = e^{i(\delta_p + \delta_k)} f_{ki}(E) \tilde{p}_{ki,S} \quad (C6.8)$$

Zusammen mit (C5.37) erhält man aus dieser Gleichung für $T_{ki,pj}$ explizit den folgenden Ausdruck:

$$T_{ki,pj}^R(E) = e^{i(\delta_p + \delta_k)} \left\{ DF_{1S} w_{ki} (1 - D \sum_n |F_{1n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E^2)) + K F_{2S} v_{ki} (1 - K \sum_n |F_{2n}|^2 2E_n / (E_n^2 - E^2)) - KD \sum_n [F_{2S} w_{ki} (F_{1n}^* / (E_n + E) + F_{1n}^* / (E_n - E)) + F_{1S} v_{ki} (F_{2n}^* / (E_n + E) + F_{2n}^* / (E_n - E))] \right\} \quad (C6.9)$$

Die Resonanzenergien des Compoundkernes sind durch die komplexen Pole dieses resonanten Anteils der T-Matrix gegeben. Wie man aus (C6.9) sieht, können diese komplexen Pole nur über die Hilfsgrößen F_{1S} und F_{2S} (s. (C5.40) und (C5.41)) definiert werden, was gleichbedeutend ist mit den komplexen Nullstellen der Energiedispersionsrelation (C5.28). Allerdings muss noch gezeigt werden, daß die resonante T-Matrix keine Pole bei den Strukturrechnungsenergien $E = E_n$ hat und daß die Einteilchenresonanzen wegfallen, da diese sonst im Anteil der Compoundkernreaktion vorkommen würde. Als erstes wird gezeigt, daß die Strukturrenergien keine Pole der T-Matrix sind und sodann wird gezeigt, daß die Einteilchenresonanzen ebenfalls keine Pole der T-Matrix sind. Dazu wird die Gleichung (C6.9) mit den Hilfsgrößen $f_v^{\alpha\alpha'}(E)$ ($v=1,2$) umgeformt. Man erhält:

$$T_{ki,pj}^R(E) = e^{i(\delta_p + \delta_k)} \left\{ F_{1S}^{\alpha\alpha'} f_{11}^{\alpha\alpha'}(E) + F_{2S}^{\alpha\alpha'} f_{22}^{\alpha\alpha'}(E) \right\} \quad (C6.10)$$

Jeder der beiden in (C6.10) in Klammer stehenden Ausdrücke haben wegen (C5.40), (C5.41) und (C5.22), (C5.23) bei $E = E_n$ einen Pol zweiter Ordnung im Zähler und einen Pol zweiter Ordnung im Nenner. Der Pol des Zählers kann als Nullstelle im Nenner und umgekehrt der Pol im Nenner als Nullstelle im Zähler geschrieben werden. Damit erhält man in der Nähe eines Pols E_{n_0} die Darstellung:

$$F_{VS}^{ki} f_{\nu}^{(E)} = \frac{(E - E_{n_0})^2 Z_{\nu}^{(E)}}{(E - E_{n_0})^2 N_{\nu}^{(E)}} \quad , \quad Z_{\nu}^{(E)} \neq 0 \quad , \quad N_{\nu}^{(E)} \neq 0 \quad , \quad (\nu=1,2) \quad (C6.11)$$

Nach zweimaliger Anwendung der L'Hospitalischen Regel und dem anschließendem Grenzübergang $E \rightarrow E_{n_0}$ folgt:

$$F_{VS}^{ki} f_{\nu}^{(E)} = \frac{Z_{\nu}^{(E_{n_0})}}{N_{\nu}^{(E_{n_0})}} \quad (C6.12)$$

Dieser Ausdruck ist aber nach (C6.11) endlich und damit hat die renormierte T-Matrix bei den Strukturrechnungsenergien E_n keine Pole. Es wird nun gezeigt, daß die Einteilchenresonanzen auch nicht als Pole der T-Matrix vorkommen. Dazu werden die Größen $D_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu=1,2$) nochmals angegeben (s. (C5.30) bis (C5.33)):

$$D_{\nu\mu}(E) = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha\alpha'}^{(E)} \left\{ \begin{array}{cc} w_{\alpha\alpha'} & \nu=1 \\ v_{\alpha\alpha'} & \nu=2 \end{array} \begin{array}{c} f_{\alpha\alpha'}^{(E)} \\ f_{\alpha\alpha'}^{(E)} \end{array} \begin{array}{c} \mu=1 \\ \mu=2 \end{array} \right\} \quad (C6.13)$$

In der Nähe einer Einteilchenresonanz wird für die in $f_{\alpha\alpha'}^{(E)}$ vorkommenden Einteilchenwellenfunktion die Resonanzapproximation verwendet. Man erhält:

$$f_{\alpha\alpha'}^{(E)} = E + \epsilon_i - \epsilon_{res} + i/2 \gamma(E + \epsilon_i) \quad (C6.14)$$

$$f_{\alpha\alpha'}^{(E)} = E + \epsilon_{res} - \epsilon_i - i/2 \gamma(E - \epsilon_i) \quad (C6.15)$$

$$|p\rangle = C(\epsilon_p) |\zeta\rangle, \quad C(\epsilon_p) = \left\{ \frac{\gamma/2\pi}{(\epsilon_p - \epsilon_{res})^2 + \gamma^2/4} \right\}^{1/2} \quad (C6.16)$$

Aus (C6.13) ergibt sich zusammen mit den Definitionen (C6.14) bis (C6.16)

$$D_{\nu\mu}(E) = \sum_i \bar{f}_i^{(E)} \left\{ \begin{array}{cc} w_{\zeta i} & \nu=1 \\ v_{\zeta i} & \nu=2 \end{array} \begin{array}{c} f_{1\mu=1}^{\zeta i} \\ f_{2\mu=2}^{\zeta i} \end{array} \right\} + \bar{f}_{\zeta}^{(E)} \left\{ \begin{array}{cc} w_{\zeta \zeta} & \nu=1 \\ v_{\zeta \zeta} & \nu=2 \end{array} \begin{array}{c} f_{1\mu=1}^{\zeta \zeta} \\ f_{2\mu=2}^{\zeta \zeta} \end{array} \right\} + \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha'} - n_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha\alpha'}^{(E)} \left\{ \begin{array}{cc} w_{\alpha\alpha'} & \nu=1 \\ v_{\alpha\alpha'} & \nu=2 \end{array} \begin{array}{c} f_{1\mu=1}^{\alpha\alpha} \\ f_{2\mu=2}^{\alpha\alpha} \end{array} \right\} \quad (C6.17)$$

außerhalb d. Resonanz

In der Nähe von $E = \epsilon_{res} - \epsilon_{i_0}$ sind alle anderen Terme klein gegenüber dem einen Summanden in der ersten Summe und werden daher

vernachlässigt. So vereinfacht sich (C6.17) zu

$$D_{\nu\mu}(E) \approx \frac{1}{f_{\zeta_0}(E)} \left\{ \sum_{\zeta_0} w_{\zeta_0} \nu=1 \frac{f_{\zeta_0\mu=1}}{f_{\zeta_0\mu=2}} \right\} = \frac{1}{f_{\zeta_0}(E)} d_{\nu\mu} \quad (C6.1)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Dispersionsrelation (C5.28)

ein, so erhält man folgende Näherungen:

$$\Delta(E) \approx 1 - (d_{11} + d_{22}) \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} + \left(\frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} \right)^2 (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}), \quad d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} = 0, \quad (C6.19)$$

$$F_{1S} \approx \{ w_{\zeta_j} (1 - d_{22}) \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} + v_{\zeta_j} \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} d_{12} \} C(\epsilon_p) / \Delta(E) \quad (C6.20)$$

$$F_{2S} \approx \{ v_{\zeta_j} (1 - d_{11}) \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} + w_{\zeta_j} \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)} d_{21} \} C(\epsilon_p) / \Delta(E) \quad (C6.21)$$

Mit diesen Näherungen erhält man für die resonante T-Matrix in der Nähe einer Einteilchen-Resonanz:

$$T_{ki,pj}^R(E) \approx \frac{C(\epsilon_p) (d_{11} + d_{22})}{1 - (d_{11} + d_{22}) \frac{1}{f_{\zeta_j}(E)}} \quad (C6.22)$$

Dieser Ausdruck kann noch weiter vereinfacht werden, wenn man in (C6.22) die Eins im Nenner vernachlässigt und (C6.14) sowie (C6.16) berücksichtigt:

$$T_{ki,pj}^R(E) \approx -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{E + \epsilon_j - \epsilon_{res} - i\gamma/2} \quad (C6.23)$$

Man liest ab, daß die Einteilchen-Breite γ wegfällt, wenn E gleich $(\epsilon_{res} - \epsilon_j)$ wird. Auch die Einteilchenresonanzen kommen also in der T-Matrix nicht vor. Damit ist nun gezeigt, daß nur die Resonanzen des Compoundsystems die Pole der T-Matrix sein können. Die totale T-Matrix erhält man aus

$$\hat{T}_{ki,pj}(E) = -\frac{1}{\pi} (e^{i\delta_p} \sin \delta_p) \delta_{pk} \delta_{ij} + T_{ki,pj}^R(E) \delta(E - E_{ki}) \quad (C6.24)$$

Damit ist das Problem der Streuung eines Nukleons an einen Einloch-Kern nebst der Bestimmung der Amplituden und der Resonanzenergien auf ein numerisch durchführbares Problem zurückgeführt worden. Es sei noch bemerkt, daß der partielle und totale Wirkungsquerschnitt, der mittels Standardverfahren aus der T-Matrix gewonnen werden kann, aus praktischen Erwägungen im Abschnitt (D5) explizit angegeben wird.

D. Vereinfachung der Modellgleichungen durch Symmetriebetrachtungen

Im ersten Unterabschnitt (D1) dieses Kapitels werden allgemeine Symmetriebetrachtungen (Fan59, Lan64) besprochen, die eine wesentliche Reduzierung der zu lösenden Gleichungen erlauben. Im zweiten Unterabschnitt (D2) wird dann das reduzierte Matricelement für die effektive renormierte Teilchen-Loch-Wechselwirkung hergeleitet. In den zwei nächsten Unterkapiteln (D3) und (D4) werden dann der Reihe nach die vereinfachten Gleichungen der konventionellen RPA und die Energiedispersionsrelation besprochen. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist der Reduktion der T-Matrix und des Wirkungsquerschnitts gewidmet.

D1. Symmetriebetrachtungen

Die Zustände der doppeltmagischen Kerne können als Eigenzustände zum Operator des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$ seiner z-Komponente J_z sowie der Parität π klassifiziert werden. Dies legt die Anwendung der Drehimpulsalgebra nahe, wodurch die in (C1) bis (C6) betrachteten Gleichungen beträchtlich vereinfacht werden. Als Resultat dieser Reduktion erhält man Gleichungen, die nur die sog. "reduzierte Matricelemente", auch "Doppelstrich-Matricelemente" genannt, enthalten. Zum besseren Verständnis der reduzierten Matricelemente führen wir durch die Gleichungen

(Fan59, Lan64)

$$[(J_x \pm i J_y, T_{kq})] = (k(k+1) - q(q \pm 1))^{1/2} T_{k(q \pm 1)} \quad (D1.1)$$

$$[J_z, T_{kq}] = q T_{kq} \quad (D1.2)$$

den Begriff des irreduziblen Tensors ein. Die Größe T_{kq} ist die q -Komponente eines irreduziblen Tensors vom Grade k und die Indizes k und q sind analog zu den Eigenwerten J und M des entsprechenden Wellenfunktionmultipletts. Ein derartiger irreduzibler Tensor hat $2k+1$ Komponenten und der Index nimmt $2k+1$ Werte zwischen $-k$ und $+k$ an. Wie man aus den beiden Gleichungen entnimmt, gehen die Komponenten T_{kq} unter Drehung in ihre Linearkombinationen über. Ferner folgt aus den Vertauschungsregeln (D1.1) und (D1.2), daß irreduzible Tensoren sich in derselben Weise zusammensetzen wie Drehimpulsmultipletts und daß die Matrixelemente irreduzibler Tensoroperatoren zwischen den Eigenzuständen des Drehimpulses $\vec{J}^2$ den Kopplungsregeln für den Drehimpuls genügen. Quantitativ wird dies durch das Wigner-Eckart-Theorem ausgedrückt, welches folgendes besagt: Die Matrixelemente der verschiedenen Komponenten desselben irreduziblen Tensors zwischen den Zuständen, die zwei gleichen Drehimpulsmultipletts angehören, sind alle zueinander proportional mit Koeffizienten, die nur von der Drehimpulsalgebra abhängen und unabhängig von den inneren Eigenschaften der Operatoren sind. Alle diese Matrixelemente sind durch eine einzige für den Operator charakteristische Größe bestimmt, die als sog. "irreduzible Matrixelemente" bezeichnet werden. In der üblichen Schreibweise erhält man (Edm64):

$$\langle J_1 M_1 T_1 J_1 M_1 | T_{kq} | J_2 M_2 \rangle = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} J_1 & k & J_2 \\ M_1 & q & M_2 \end{pmatrix} \langle J_1 || T_k || J_2 \rangle, \quad \hat{J} := \sqrt{2J+1} \quad (D1.3)$$

wobei $\langle J_1 || T_k || J_2 \rangle$ das reduzierte Matrixelement eines sphärischen Tensors darstellt, der Clebsch-Gordan-Koeffizient $\begin{pmatrix} J_1 & k & J_2 \\ M_1 & q & M_2 \end{pmatrix}$ drückt die Abhängigkeit des Matrixelements von den magnetischen Quantenzahlen aus. Das reduzierte Matrixelement kann beispiels-

weise berechnet werden, wenn das Matrixelement auf der linken Seite von (D1.3) für einen speziellen Satz dieser Quantenzahlen bekannt ist. Im folgenden wird $|\alpha\rangle$ abkürzend für $|\epsilon \frac{j}{\alpha} m \frac{l}{\alpha} t \frac{s}{\alpha}\rangle$ verwendet, mit:

$$\langle \hat{T} |\alpha\rangle = |\alpha\rangle R_{\epsilon \alpha \frac{j}{\alpha} m \frac{l}{\alpha} t \frac{s}{\alpha}}^{(r)} \sum_{m_s} \begin{pmatrix} l & 1/2 & j \\ m-m & m & m \end{pmatrix}_{\alpha s s \alpha}^{1/2} m_s \rangle Y(\hat{r}) , R_{\epsilon j | t_3}^{(r)} = R_{\epsilon j | t_3}^{*(r)} \quad (D1.4)$$

Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &:= (\epsilon \frac{j}{\alpha} l) \\ \hat{\alpha} &:= (\bar{\alpha} t_3 \alpha) \\ M &:= (E_{MM} J_{MM} T_{M3} K) \\ \bar{M} &:= (E_{\bar{M}\bar{M}} J_{\bar{M}\bar{M}} K) \\ \hat{M} &:= (\bar{M}, T_3) \end{aligned} \quad (D1.5)$$

K steht für die restlichen Quantenzahlen. Der Einteilchenerzeugungsoperator ist durch

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} | \text{Vakuum} \rangle = |\alpha\rangle \quad (D1.6)$$

gegeben. Der Operator $\hat{a}_{\alpha}$ ist also ein irreduzibler sphärischer Tensoroperator, dessen räumliches Drehverhalten durch $|\frac{j}{\alpha} m_{\alpha}\rangle$ gegeben ist. Für unsere Rechnungen ist der Teilchen-Loch-Operator von Bedeutung, dessen Komponenten durch

$$B_{\alpha\beta}^{JM} = \sum_{m_{\alpha} m_{\beta}} (-1)^{m_{\beta}} \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & J \\ m_{\alpha} & -m_{\beta} & M \end{pmatrix} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \quad (D1.7)$$

gegeben sind. Aus (D1.7) liest man ab, daß das Teilchen-Loch-Erzeugungsoperator bezüglich räumlicher Drehung sich $|JM\rangle$ verhält und daher ein irreduzibler, sphärischer Tensor ist. Berücksichtigt man, daß der Grundzustandsspin eines doppeltmagischen Kernes gleich Null ist, so erhält man für das reduzierte Matrixelement des Teilchen-Loch-Erzeugungsoperators mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems (D1.3):

$$\langle 0 | B_{\alpha\beta}^{JM} | M \rangle = \begin{pmatrix} J_M & J & 0 \\ M-M & J & 0 \end{pmatrix} \langle \hat{0} || \hat{B}_{\alpha\beta}^J || \hat{M} \rangle = \frac{(-1)^{J+M}}{J} \delta_{J_M} \delta_{M_J-M} \langle \hat{0} || \hat{B}_{\alpha\beta}^J || \hat{M} \rangle \quad (D1.8)$$

Berücksichtigt man die Orthogonalitätsrelation für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, so ergibt sich aus (D1.7) die Umkehrformel

$$t_{\alpha\beta}^{\dagger} = (-)^{j_{\beta}-m_{\beta}} \sum_{JM_J} \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & J \\ m_{\alpha} & m_{\beta} & M_J \end{pmatrix} B_{\alpha\beta}^{+JM_J} \quad (D1.9)$$

woraus sich mit Hilfe von (D1.8) für die renormierte Teilchen-

Loch-Amplitude $\tilde{P}_{\beta\alpha M}^{JM}$ ergibt:

$$\tilde{P}_{\beta\alpha M}^{JM} = \left(\frac{Z}{Z'} \right)^{-1/2} \langle t_{\alpha\beta}^{\dagger} | M \rangle = \left(\frac{Z}{Z'} \right)^{-1/2} (-)^{j_{\beta}-m_{\beta}} \sum_{JM_J} \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & J \\ m_{\alpha} & m_{\beta} & M_J \end{pmatrix} \frac{(-)^{j_{\alpha}+M_J}}{J} J_M^{\delta} M_J - M_M \langle \hat{0} || B_{\alpha\beta}^{+J} || \hat{M} \rangle \quad (D1.10)$$

Als Nächstes werden die reduzierten Matrixelemente von Zweiteilchenoperatoren in der Teilchen-Loch-Kopplung berechnet.

Ein solcher Zweiteilchenoperator ist die irreduzible Teilchen-Loch-Wechselwirkung. Das reduzierte reduzierte Matrixelement

von $\langle \alpha\beta || U || \gamma\delta \rangle$ im natürlichen Kopplungsschema $\begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j_{\gamma} & j_{\delta} \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ lautet:

$$\langle \alpha\beta || U || \gamma\delta \rangle = \hat{J} \sum_{\substack{m_{\alpha} m_{\beta} \\ m_{\gamma} m_{\delta}}} \begin{pmatrix} j_{\beta} & j_{\alpha} & J \\ m_{\beta} & m_{\alpha} & M_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\gamma} & j_{\delta} & J' \\ m_{\gamma} & m_{\delta} & M_J' \end{pmatrix} \langle \alpha\beta || U || \gamma\delta \rangle \quad (D1.11)$$

wobei U einen Zweiteilchenoperator darstellt.

Das Ziel ist nun wegen der RPA-Gleichungen eine Kopplungsordnung

$\begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} j_{\beta} & j_{\delta} \end{pmatrix}$ zu erreichen, was man als Teilchen-Loch-Kopplung bezeichnet. Das letztgenannte Schema erreicht man durch Umkop-

plung der vier Drehimpulse j_{α} , j_{β} , j_{γ} und j_{δ} . Man erhält für das reduzierte Matrixelement in Teilchen-Loch-Kopplung

$$\langle \hat{\alpha}\hat{\beta} || U || \hat{\gamma}\hat{\delta} \rangle = \sum_{J'} \hat{J} \hat{J}' \left\{ \begin{matrix} j & j & J' \\ j & j & J \end{matrix} \right\} \langle \hat{\alpha}\hat{\beta} || U || \hat{\gamma}\hat{\delta} \rangle \quad (D1.12)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind die Wignerschen 6-j-Symbole.

Aus den Symmetrieeigenschaften der reduzierten Matrixelemente

bzw. der 6-j-Symbole folgt

$$\langle \hat{\alpha}\hat{\beta} || U || \hat{\gamma}\hat{\delta} \rangle = (-)^{j_{\alpha}+j_{\beta}+j_{\gamma}+j_{\delta}} \langle \hat{\beta}\hat{\alpha} || U || \hat{\delta}\hat{\gamma} \rangle \quad (D1.13)$$

Ist U ein hermitescher Operator, so ergibt sich eine weitere

Symmetrierelation für

$$\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | \hat{U} | \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle = (-)^{j_{\alpha} + j_{\beta} + j_{\gamma} + j_{\delta}} \langle \hat{\gamma} \hat{\delta} | \hat{U} | \hat{\alpha} \hat{\beta} \rangle^* \quad (D1.14)$$

Unter Benutzung der angegebenen Symmetrien, sowie der Umkopplungsformel der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} j_{\beta} & j_{\alpha} & j_{\gamma} \\ m_{\beta} & m_{\alpha} & m_{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\gamma} & j_{\delta} & j \\ m_{\gamma} & m_{\delta} & m \end{pmatrix} = (-)^{j_{\beta} + j_{\gamma} + m} \sum_{J M_J} \begin{pmatrix} j_{\beta} & j_{\delta} & J \\ m_{\beta} & m_{\delta} & M_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & J \\ m_{\alpha} & m_{\gamma} & M_J \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & j' \\ j_{\gamma} & j_{\delta} & j \end{matrix} \right\} \quad (D1.15)$$

und (D1.12) erhält man aus (D1.11) für das Matricelement U

$$\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | \hat{U} | \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle = (-)^{j_{\beta} + m_{\beta} + j_{\gamma} + m_{\gamma}} \sum_{J M_J} \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & J \\ m_{\alpha} & m_{\gamma} & M_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\beta} & j_{\delta} & J \\ m_{\beta} & m_{\delta} & M_J \end{pmatrix} \langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | \hat{U} | \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle \quad (D1.16)$$

mit

$$\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | \hat{U} | \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle := \langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | \hat{U} | \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle / \hat{J} \quad (D1.17)$$

Die Gleichungen (D1.10) und (D1.16) spielen bei den folgenden Rechnungen eine wichtige Rolle.

D2. Die Wahl der Restwechselwirkung

Es wurde bereits erwähnt, daß die effektive Wechselwirkung phänomenologisch vorgegeben wird. Um die sonst sehr aufwendigen Rechnungen zu vereinfachen, muss der phänomenologische Ansatz für die effektive Kraft bezüglich Orts- und Energieabhängigkeit eine besonders einfache Struktur haben. Üblich ist der folgende energieunabhängige Ansatz:

$$\langle \vec{r}_1 \vec{r}_2 | F | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \sum_{i=1}^2 F_i(r_i) \left\{ f_i + g_i \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_i + f'_i \vec{\tau}_i \vec{\tau}_i + g'_i (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_i) (\vec{\tau}_i \vec{\tau}_i) \right\} \quad (D2.1)$$

Die hier eingehenden Parametern werden durch Anpassung an die experimentellen Daten festgelegt. Die Migdalsche Kraft und die Surface Delta Interaction (SDI) sind im obigen Ansatz als Spezialfälle enthalten. Die Migdalsche Kraft (Mig66) erhält man aus (D2.1) durch die Vereinbarungen

$$F_1(r) = \rho(r)/\rho(0), F_2(r) = 1 - \rho(r)/\rho(0), \rho(r) = [1 + e^{-(R-r)/a}]^{-1}, R = r_0 A^{1/3} \quad (D2.2)$$

Mit

$$F_1(r) = \delta(r-R), F_2(r) = 0, f'_i = g'_i = 0, (i=1,2), g_i = \eta, f_i = 1 - g_i \quad (D2.3)$$

ergibt sich aus (D2.1) die SDI, wobei η einen frei wählbaren Parameter darstellt. Nach den Standardmethoden der Drehimpulsalgebra erhält man für das reduzierte Matrixelement der SDI (antisymmetrisiert) (Let66) entsprechend der Gleichung (D1.12), also in der Teilchen-Loch-Kopplung:

$$\langle\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} || \hat{F} || \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle\rangle = \hat{D} \hat{w}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \hat{w}_{\hat{\beta}\hat{\delta}} + \hat{K} \hat{v}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \hat{v}_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \quad (D2.4)$$

wobei die einzelnen Größen in (D2.4) durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

$$\hat{D} = \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \hat{D}_{3\alpha 3\gamma 3\beta 3\delta} = \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \left\{ (-1)^{\frac{\pi}{8}} \frac{V_0}{8\pi} \frac{1}{j^2} \left[-\delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \left(\frac{1}{2} + (-1)^{j+1} \right) \frac{j+1}{2\eta} \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \left(\frac{1}{2} + (1-2\eta)(-1)^{j+1} \right) \right] \right\} \quad (D2.5)$$

$$\hat{K} = \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \hat{K}_{3\alpha 3\gamma 3\beta 3\delta} = \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \left\{ (-1)^{\frac{\pi}{8}} \frac{V_0}{8\pi} \frac{1}{j^2} \left[\delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \left(\frac{1}{2} - 2\eta \right) - 2\eta \delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta} \right] \right\} \quad (D2.6)$$

$$\hat{w}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \hat{w}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \left(\begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\gamma} & j \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right) R \hat{R}_{\alpha}^{(R)} \hat{R}_{\gamma}^{(R)} (-1)^{j+1/2} i^{\gamma-1\alpha} \quad (D2.7)$$

$$\hat{v}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \hat{v}_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \left(\begin{matrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & j \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \right) R \hat{R}_{\alpha}^{(R)} \hat{R}_{\gamma}^{(R)} (-1)^{\alpha} i^{\gamma-1\alpha} \quad (D2.8)$$

Der Faktor $\delta_{3\alpha+3\beta, 3\gamma+3\delta}$ in (D2.5) und (D2.6) zeigt, daß die Ladungserhaltung garantiert ist. Durch $t_{3\alpha} = t_{3\gamma}$ werden die doppelmagischen Kerne und durch $t_{3\alpha}^* t_{3\gamma}$ die Spiegelkerne (uu-Kerne) beschrieben. Der Phasenfaktor $(-1)^{\pi}$ steht für die relative Parität des angeregten Systemzustandes gegenüber dem Grundzustand und ist durch $(-1)^{\pi} = (-1)^{\alpha+1\gamma} = (-1)^{\beta+1\delta}$ gegeben.

Will man Teilchen und Loch zu gutem Isospin T koppeln, so bedeutet das für die entsprechenden Tensoren im Abschnitt (D1), daß sie bezüglich der Drehung im Isospinraum das gleiche Drehverhalten haben wie die Isospinmultipletts $|T T_3\rangle$. Mit dem Wigner-Eckart-Theorem lassen sich dann die irreduziblen Tensoren auch bezüglich des Isospins reduzieren. Das isospinreduzierte Matrixelement $\langle\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} || \hat{F}^T || \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle\rangle$ unterscheidet sich von $\langle\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} || \hat{F} || \hat{\gamma} \hat{\delta} \rangle\rangle$

durch die Größen D und K. Für diese ergibt sich:

$$D = (-)^{\frac{\pi}{2}} \frac{V_0}{8\pi} \frac{1}{j^2} \left\{ -(1+(-)^{j+\pi}) + 2 \delta_{T,0} (1+(1-2\eta)(-)^{j+\pi}) \right\} \quad (D2.9)$$

$$K = (-)^{\frac{1+\pi}{2}} \frac{V_0}{8\pi} \frac{1}{j^2} \left\{ (1-2\eta) - 4\eta \delta_{T,0} \right\} \quad (D2.10)$$

Für die Migdalsche Kraft lautet das reduzierte Matrixelement in guter Isospinkopplung:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha} \beta || F || \bar{\gamma} \delta \rangle &= \frac{V_0}{8\pi} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} (-)^{l_{\alpha}+l_{\beta}+l_{\gamma}+l_{\delta}} \sum_{i=1}^2 \bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\gamma} & j_{\delta} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\} [(-)^{l_{\alpha}} (f_i + f'_i - g_i - g'_i) + (-)^{l_{\beta}} (f_i - f'_i - g_i - g'_i) + (-)^{l_{\gamma}} (f_i + f'_i + g_i + g'_i) + (-)^{l_{\delta}} (f_i - f'_i + g_i - g'_i)] + (-)^{l_{\alpha}+l_{\delta}+j_{\beta}+j_{\delta}+\pi} \\ &\quad \left\{ \begin{pmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{\gamma} & j_{\delta} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\} [(-2g_i - 2g'_i) + (-)^{l_{\alpha}} (-2g_i + 2g'_i)] \end{aligned} \quad (D2.11)$$

dabei ist die Größe $\bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ definiert durch

$$\bar{G}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_0^{\infty} r^2 dr F_i(r) R_{\alpha}(r) R_{\beta}(r) R_{\gamma}(r) R_{\delta}(r) \quad (D2.12)$$

D3. Vereinfachung der konventionellen RPA-Gleichungen durch Symmetriebetrachtungen

Zur Reduktion der Standard RPA-Gleichungen (C3.3) wird angenommen, daß sich die Einteilchenwellenfunktionen $\langle \bar{r} | \alpha \rangle$ definiert durch

$$\langle \bar{r} | \alpha \rangle = (-)^{l_{\alpha}} R_{\epsilon_j l_3} \sum_{m_s} \left(\begin{matrix} l_{\alpha} & 1/2 \\ m_{\alpha} & m_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m_{\alpha} \end{matrix} \right) Y_{l_{\alpha} m_s}(\hat{r}) \quad (D3.1)$$

für Protonen und Neutronen nur durch den Isospinanteil unterscheiden. Diese Näherungsannahme ist für die gebundenen Zustände bei leichten Kernen gerechtfertigt, da die Coulombabstoßung bezüglich der Wellenfunktion vernachlässigbar ist. Für die Protonen- und Neutronen-Einteilchenenergien weiß man aus der Erfahrung, daß ihre Differenzen für denselben Kern in sehr guter Näherung eine Konstante ist (Coh68, Mav67), die nur von der Nukleonenzahl A des betreffenden Kernes abhängt, d.h. es gilt:

$$\epsilon_{\alpha}^{t3=1/2} - \epsilon_{\alpha}^{t3=-1/2} \equiv C(A) \quad (D3.2)$$

Somit sind die Energiedifferenzen $(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'})$ in (C3.3) für alle $(\alpha \alpha') \in \{ (ri), (ir) \}$ unabhängig von $t_{3\alpha}$ und $t_{3\alpha'}$. Ferner gilt für die doppeltmagischen Kerne, daß n_{α} von $t_{3\alpha}$ unabhängig ist. Damit kann man den Gesamtisospin T des Systems als eine gute Quantenzahl betrachten. In dieser Approximation erhält man für die reduzierten Gleichungen (C3.3) unter Berücksichtigung von (D1.10) sowie (D1.16):

$$(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'} - E_{\bar{n}}) \langle \bar{0} || \tilde{B} || \bar{n} \rangle = (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) \sum_{\bar{\delta} \bar{\delta}'} \langle \bar{\alpha} \bar{\delta}' || \tilde{I} || \bar{\alpha}' \bar{\delta} \rangle \langle \bar{0} || \tilde{B} || \bar{n} \rangle \quad (D33)$$

mit

$$\langle \bar{0} || \tilde{B} || \bar{n} \rangle := (Z_{\bar{\delta}} - Z_{\bar{\delta}'}^{-1/2}) \langle \bar{0} || \tilde{B} || \bar{n} \rangle \quad (D34)$$

Wegen der Hermitizität von $\tilde{I}$ kann (D3.3) unter Berücksichtigung der Symmetriebeziehung (D1.13) sowie (D1.14) in folgende Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W \\ U \end{bmatrix} = E_{\bar{n}} \begin{bmatrix} W \\ U \end{bmatrix} \quad (D35)$$

Die Elemente der RPA-Matrix werden durch die Gleichungen

$$A_{(\bar{\alpha}\bar{\alpha}')(\bar{\delta}\bar{\delta}')} := (\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \delta_{\bar{\alpha}\bar{\delta}} \delta_{\bar{\alpha}'\bar{\delta}'} - \langle \bar{\alpha} \bar{\delta}' || \tilde{I} || \bar{\alpha}' \bar{\delta} \rangle \quad (D36)$$

und

$$B_{(\bar{\alpha}\bar{\alpha}')(\bar{\delta}\bar{\delta}')} := (-)^{j_{\bar{\delta}} + j_{\bar{\delta}'}} \langle \bar{\alpha} \bar{\delta}' || \tilde{I} || \bar{\alpha}' \bar{\delta} \rangle \quad (D37)$$

definiert. Für die Komponenten des Spaltenvektors W und U

gelten die Definitionsgleichungen:

$$(W_{\bar{n}})_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} := \langle \bar{0} || \tilde{B} || \bar{n} \rangle \quad (D38)$$

und

$$(U_{\bar{n}})_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} := (-)^{j_{\bar{\delta}} - j_{\bar{\delta}'} + T_{\bar{\delta}} - T_{\bar{\delta}'}} \langle \bar{n} || \tilde{B} || \bar{0} \rangle^* \quad (D39)$$

Sowohl ϵ_{α} als auch n_{α} sind unabhängig von den magnetischen Quantenzahlen, da es keine ausgezeichneten Richtungen gibt. Es gelten:

$$\epsilon_{\alpha} = \epsilon_{\alpha'} \quad , \quad n_{\alpha} = n_{\alpha'}$$

Der Faktor 2π wurde in das reduzierte Matrixelement der Kraft einbezogen.

Zwischen den Komponenten von $W_{\bar{n}}$ und $U_{\bar{n}}$ ergibt sich aus der Drehimpulsalgebra die folgende nützliche Relation:

$$(U_{\bar{n}})_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} = (-1)^{j-\bar{\alpha}} (W_{\bar{n}})_{\bar{\alpha}'\bar{\alpha}} \quad (D310)$$

Die Normierungsbedingung für die reduzierten Teilchen-Loch-Amplituden $(W_{\bar{n}}, U_{\bar{n}})$ lautet:

$$\begin{pmatrix} W_{\bar{n}} \\ U_{\bar{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{\bar{n}}' \\ -U_{\bar{n}}' \end{pmatrix} = -\delta_{\bar{n}\bar{n}'} \text{sign}(E_{\bar{n}}) \hat{j}_n^2 \hat{T}_n^2, \quad \text{sign}(0) = 0 \quad (D311)$$

Diese Beziehung setzt voraus, daß alle $E_{\bar{n}}$ reell sind und daß $\tilde{I}$ unabhängig von $E_{\bar{n}}$ ist. Die Energieunabhängigkeit von $\tilde{I}$ ist durch den phänomenologischen Ansatz (D2.1) garantiert und für die Energien $E_{\bar{n}}$ konnte Thouless im Rahmen der Hartree-Fock-Theorie zeigen, daß in einer stabilen, selbstkonsistenten Hartree-Fock-Basis alle Energieeigenwerte $E_{\bar{n}}$ reell sind (s.a. C4).

D4. Vereinfachung der Energiedispersionsrelation durch Symmetriebetrachtungen

In diesem Abschnitt wird versucht mit den im Abschnitt (D1) angegebenen Methoden die Dispersionsrelation (C5.8) bezüglich einiger Quantenzahlen zu reduzieren. Dazu wird vorausgesetzt, daß für die gebundenen Einteilchenwellenfunktionen und Einteilchenenergien auch weiterhin gilt, daß sie sich nur durch den Isospinanteil unterscheiden (s.D3). Die Einteilchenstreuwellenfunktionen für Protonen und Neutronen unterscheiden sich dagegen auch im Radialanteil, da für die Protonen im Aussenraum die Coulomb-Wechselwirkung nicht vernachlässigt werden kann. Um die reduzierte Dispersionsrelation zu erhalten, ist es notwendig die reduzierten Matrixelemente für einige anderen Größen,

die in diese Relation eingehen, zu berechnen. Die folgenden Rechnungen dienen als Vorbereitung zu diesem Zwecke.

Für das reduzierte Matricelement der Teilchen-Loch-Amplitude aus (C5.8) erhält man durch Standardmethoden der Drehimpulsalgebra (s.z.B. Eis65, Let66):

$$\langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^{+JM} \parallel \hat{M} \rangle = \sum_n \delta_{J_n J_M} \{ \langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle \langle \hat{n} \parallel \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^{+J_n} \parallel \hat{O} \rangle (-)^{J_M - M_M} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} + \langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^{+J_n} \parallel \hat{n} \rangle \delta_{M_n M_M} \delta_{T_{3n} T_{3M}} \}, (\hat{\alpha}\hat{\alpha}) \in \{(\hat{n}\hat{n}), (\hat{n}\hat{n})\} \quad (D4.1)$$

Die rechte Seite der Gleichung zeigt, daß sie bezüglich des Gesamtdrehimpulses diagonal ist. Die Summation über n reduziert sich wegen der $\hat{O}$ -Faktoren der magnetischen und der dritten Komponenten der Isospinquantenzahl auf die Summation über Energie E_n . Für die numerischen Rechnungen bedeutet das eine wesentliche Vereinfachung. Die dritte Komponente des Isospins T_{3M} bestimmt den Typ des Streuprozesses. Z.B. bedeutet die Ladungsaustauschreaktion, daß T_{3M} gleich Null ist. Für die in diese Gleichung eingehenden Matricelemente $\langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle$ und $\langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle$ erhält man aus (C5.11) und (C5.12):

$$\{E_n + E_M\} \langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle = - \sum_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \sum_{\beta\beta'} \delta_{J_n J_M} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} \frac{1}{J_M} \{ \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^{+JM} \parallel \hat{n} \rangle \langle \hat{\alpha}\hat{\beta} \parallel \tilde{I}^{JM} \parallel \hat{\alpha}\hat{\beta} \rangle \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{+JM} \parallel \hat{M} \rangle (-)^{J_M - M_M} \} \quad (D4.2)$$

und

$$\{E_n - E_M\} \langle 0 \parallel \hat{Q} \parallel M \rangle = - \sum_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \sum_{\beta\beta'} \delta_{J_n J_M} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} \frac{1}{J_M} \{ \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}^{+JM} \parallel \hat{n} \rangle \langle \hat{\alpha}\hat{\beta} \parallel \tilde{I}^{JM} \parallel \hat{\alpha}\hat{\beta} \rangle \langle 0 \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{+JM} \parallel \hat{M} \rangle \} \quad (D4.3)$$

Dabei gilt:

$$t_{3\alpha} - t_{3\alpha'} = T_{3n} \quad , \quad t_{3\beta} - t_{3\beta'} = T_{3M} \quad (D4.4)$$

Setzt man nun in (D4.2) und (D4.3) für das reduzierte Matrix-

element der Kraft (s. (D2.4))

$$\langle\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | | \hat{I}^{JM} | | \hat{\alpha} \hat{\beta} \rangle\rangle = \delta_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \{ D_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} w_{\alpha\alpha} w_{\beta\beta} + K_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} v_{\alpha\alpha} v_{\beta\beta} \}, \quad (D4.5)$$

ein, so erhält man daraus die folgenden kompakten Gleichungen:

$$\{ E_n + E_M \} \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = (-1)^{\frac{M}{J_M}} \delta_{M_n} - M_{3n} \delta_{T_{3n}} - T_{3n} \sum_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \delta_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \{ D_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} F_{1n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} F_{1M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} + (-1)^{J_M + \bar{n} + 1} K_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} F_{2n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} F_{2M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \} \quad (D4.6)$$

$$\{ E_n - E_M \} \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = - \frac{1}{J_M} \delta_{M_n} - M_{3n} \delta_{T_{3n}} - T_{3n} \sum_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \delta_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \{ D_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} F_{1n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} F_{1M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} + K_{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+}^{JM} F_{2n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} F_{2M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+ t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} \} \quad (D4.7)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen und Symmetriebeziehungen benutzt (s.a. (C5.16) bis (C5.19)):

$$F_{1n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} = (-1)^{\frac{J_M}{J_M}} \sum_{\alpha\alpha'} w_{\alpha\alpha'} \langle 0 | | \hat{B}_{\alpha\alpha'}^{JM} | | \hat{n} \rangle \quad (D4.8)$$

$$F_{2n}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} = (-1)^{\frac{J_M}{J_M}} \sum_{\alpha\alpha'} v_{\alpha\alpha'} \langle 0 | | \hat{B}_{\alpha\alpha'}^{JM} | | \hat{n} \rangle \quad (D4.9)$$

$$F_{1M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} = \sum_{\beta\beta'} w_{\beta\beta'} \langle 0 | | \hat{B}_{\beta\beta'}^{JM} | | \hat{n} \rangle \quad (D4.10)$$

$$F_{2M}^{t_{3\alpha}^+ t_{3\beta}^+} = \sum_{\beta\beta'} v_{\beta\beta'} \langle 0 | | \hat{B}_{\beta\beta'}^{JM} | | \hat{n} \rangle \quad (D4.11)$$

$$w_{\alpha\alpha'} = (-1)^{j_{\alpha'} - j_{\alpha}} w_{\alpha'\alpha} \quad (D4.12)$$

$$v_{\alpha\alpha'} = (-1)^{j_{\alpha'} + j_{\alpha} - l_{\alpha} - l_{\alpha'}} v_{\alpha'\alpha} \quad (D4.13)$$

Die reduzierte Dispersionsrelation kann man aus den Gleichungen

(D4.10) und (D4.11) herleiten, wenn man das reduzierte Matrix-

element $\langle 0 | | \hat{B}_{\alpha\alpha'}^{JM} | | \hat{B} \rangle$ ($(\hat{\alpha}\hat{\alpha}) \in \{(\hat{k}\hat{i}), (\hat{i}\hat{k})\}$) kennt. Dieses wird aus der Gleichung (s.a. (C2.2))

$$\tilde{p}_{\alpha\alpha',B} = f_{\alpha\alpha'}^{-1}(E_B) (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) \sum_{\beta\beta'} \tilde{I}_{\alpha\beta'\alpha\beta} \tilde{p}_{\beta\beta',B} \quad (D4.14)$$

berechnet. Man erhält:

$$\langle 0 | | \hat{B}_{\alpha\alpha'} | | \hat{B} \rangle = f_{\alpha\alpha'}^{-1}(E_B) (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) \sum_{\beta\beta'} \langle\langle \hat{\alpha} \hat{\beta} | | \hat{I}^{JB} | | \hat{\alpha} \hat{\beta} \rangle\rangle \langle 0 | | \hat{B}_{\beta\beta'}^{JB} | | \hat{B} \rangle \quad (D4.15)$$

Setzt man in diese Gleichung für das reduzierte Matrixelement

der Kraft den Ausdruck (D4.5) ein, so erhält man:

$$\langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\alpha\alpha}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle = f_{\alpha\alpha}^{-1} (E_{\alpha} / (n_{\alpha} - n_{\alpha}')) \sum_{t_{3\beta} t_{3\beta'}} \{ w_{\alpha\alpha}^{JB} D_{t_{3\alpha} t_{3\alpha} t_{3\beta} t_{3\beta'}} \sum_{\beta\beta'} w_{\beta\beta'} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle + v_{\alpha\alpha}^{JB} K_{t_{3\alpha} t_{3\alpha} t_{3\beta} t_{3\beta'}} \sum_{\beta\beta'} v_{\beta\beta'} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle \} \quad (D4.16)$$

Die in Klammer stehende Summen müssen vereinfacht werden, um das reduzierte Matrixelement zu berechnen. Dazu werden diese Summen in diskrete und kontinuierliche Anteile aufgespalten.

Man erhält in der kürzeren Schreibweise:

$$\sum_{\beta\beta'} \{ \frac{w_{\beta\beta'}}{v_{\beta\beta'}} \} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle = \sum_{\beta\beta'}' \{ \frac{w_{\beta\beta'}}{v_{\beta\beta'}} \} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle + \sum_{\beta\beta'}'' \{ \frac{w_{\beta\beta'}}{v_{\beta\beta'}} \} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle \quad (D4.17)$$

Vergleicht man die zweite Summe der rechten Seite von (D4.17)

und (D4.11), so ergibt sich:

$$\sum_{\beta\beta'}'' \{ \frac{w_{\beta\beta'}}{v_{\beta\beta'}} \} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle = \{ \begin{matrix} F_{1B}^{t_{3\beta} t_{3\beta}} \\ F_{2B}^{t_{3\beta} t_{3\beta}} \end{matrix} \} \quad (D4.18)$$

Die erste Summe von (D4.17) kann noch vereinfacht werden. Für diesen Zweck werden die Ausdrücke (D4.6) und (D4.7) in die erste Summe eingesetzt. Nach elementarer Umformung erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta\beta'}' \{ \frac{w_{\beta\beta'}}{v_{\beta\beta'}} \} \langle \hat{O} \parallel \tilde{B}_{\beta\beta}^{JB} \parallel \hat{B} \rangle &= \sum_n \delta_{nJB} (-)^{J_B - M_B} \delta_{M_n, -M_B} \delta_{T_{3n}, T_{3B}} (-)^{\pi_{JB}} F_{1n}^{t_{3\beta} t_{3\beta}} \frac{1}{F_{2n}^{t_{3\beta} t_{3\beta}}} \frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{B}}} \\ &\sum_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}} (D_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}}^{JB} F_{1n}^{t_{3v} t_{3v'}} F_{1B}^{t_{3\mu} t_{3\mu'}} (-)^{\pi_{JB} + 1} K_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}}^{JB} F_{2n}^{t_{3v} t_{3v'}} F_{2B}^{t_{3\mu} t_{3\mu'}}) \\ &\delta_{M_n M_B} \delta_{T_{3n} T_{3B}} (-)^{\pi} \{ \frac{F_{1n}^{t_{3\beta} t_{3\beta}}}{F_{2n}^{t_{3\beta} t_{3\beta}}} \} (-)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{B}}} \sum_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}} (D_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}}^{JB} F_{1n}^{t_{3v} t_{3v'}} F_{1B}^{t_{3\mu} t_{3\mu'}} \\ &K_{t_{3v} t_{3v'} t_{3\mu} t_{3\mu'}}^{JB} F_{2n}^{t_{3v} t_{3v'}} F_{2B}^{t_{3\mu} t_{3\mu'}}) \} \end{aligned} \quad (D4.19)$$

Mit (D4.18) und (D4.19) erhält man aus (D4.16):

$$\begin{aligned}
 \langle 0 || \tilde{B}_{\alpha\alpha}^{JB} || \hat{B} \rangle &= f_{\alpha\alpha}^{-1} (E_{\alpha}) (\ln_{\alpha} - n_{\alpha}) \sum_{t_3 t_3 \beta} \delta_{t_3 t_3 \beta} w_{\alpha\alpha} D_{t_3 t_3 \beta}^{JB} \left\{ \sum_n \delta_n J_B [(-1)^{\pi+1} \delta M_n - M_B \delta T_{3n} - T_{3B} \right. \\
 &\quad \left. F_{1\hat{n}} \left[\frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{B}}} \sum_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} \delta_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} (D_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu}^{JB} F_{1\hat{n}} F_{1\hat{B}} + (-1)^{J_B + \pi+1} K_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{B}}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. (-1)^{\pi+1} \delta M_n M_B \delta T_{3n} T_{3B} F_{1\hat{n}} \left[\frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{B}}} \sum_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} \delta_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} (D_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu}^{JB} F_{1\hat{n}} F_{1\hat{B}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. K_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{B}}) \right] \right\} + \sum_{t_3 \mu t_3 \beta} \delta_{t_3 \mu t_3 \beta} F_{1\hat{B}} \} + v_{\alpha\alpha} K_{t_3 \alpha t_3 \beta}^{JB} \cdot \\
 &\quad \left\{ \sum_n \delta_n J_B [(-1)^{\pi} \delta M_n - M_B \delta T_{3n} - T_{3B} F_{1\hat{n}} \left[\frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} - E_{\hat{B}}} \sum_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} \delta_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} (D_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu}^{JB} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. F_{2\hat{n}} F_{2\hat{B}} + (-1)^{J_B + \pi+1} K_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{B}}) \right] \right\} + (-1)^{\pi+1} \delta M_n M_B \delta T_{3n} T_{3B} F_{2\hat{n}} \left[\frac{1}{J_B} \frac{1}{E_{\hat{n}} - E_{\hat{B}}} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \sum_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} \delta_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} (D_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu}^{JB} F_{1\hat{n}} F_{1\hat{B}} + K_{t_3 v t_3 \mu t_3 \mu} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{B}}) \right] \} + \\
 &\quad \sum_{t_3 \mu t_3 \beta} \delta_{t_3 \mu t_3 \beta} F_{2\hat{B}} \} \}
 \end{aligned}
 \tag{D4-20}$$

Diese Gleichung lässt sich in eine für die Herleitung der reduzierten Dispersionsrelation günstigen Form bringen, wenn man sie nach den Koeffizienten von $F_{1B}^{t_3 t_3}$ und $F_{2B}^{t_3 t_3}$ zusammenfasst. Nach trivialer Umformung ergibt sich daraus:

$$\langle 0 || \tilde{B}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} || B \rangle = f_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}^{-1} (E_{\hat{\alpha}}) (n_{\hat{\alpha}} - n_{\hat{\alpha}'}) \sum_{t_3 \beta t_3 \beta'} \{ f_{1 t_3 \beta t_3 \beta'}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} (E_{\hat{\alpha}}) F_{1B}^{t_3 t_3 \beta \beta'} + f_{2 t_3 \beta t_3 \beta'}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} (E_{\hat{\alpha}}) F_{2B}^{t_3 t_3 \beta \beta'} \} \quad (D4.21)$$

Die in dieser Gleichung verwendeten Koeffizienten von $F_{1B}^{t_3 t_3}$ und $F_{2B}^{t_3 t_3}$ sind durch (s. a. (C5.23) und (C5.24))

$$\begin{aligned} f_{1 t_3 \beta t_3 \beta'}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} (E_{\hat{\alpha}}) &= D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} w_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \delta_{t_3 t_3'} \delta_{\beta \beta'} - \sum_n \frac{J_n J_M}{J_2} \sum_{t_3 \nu t_3 \nu'} \delta_{3\alpha t_3 \nu 3\alpha' t_3 \nu'} \delta_{3\mu t_3 \nu 3\mu' t_3 \nu'} D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} \\ &\{ (-1)^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{M}}} F_{1\hat{n}} F_{1\hat{M}} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} w_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} (-1)^{M+1} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{M}}} F_{1\hat{n}} F_{1\hat{M}} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} \cdot \\ &K_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} v_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \} + \frac{(-1)^{\frac{\pi}{2}}}{E_{\hat{n}} - E_{\hat{M}}} \delta_{M_n M_M} \delta_{T_{3n} T_{3M}} \left[\frac{3\mu 3\mu'}{F_{1\hat{n}} F_{1\hat{M}}} D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} \cdot \right. \\ &\left. w_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} + F_{1\hat{n}} F_{1\hat{M}} K_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} v_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \right] \end{aligned} \quad (D4.22)$$

und

$$\begin{aligned} f_{2 t_3 \beta t_3 \beta'}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} (E_{\hat{\alpha}}) &= K_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} v_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \delta_{t_3 t_3'} \delta_{\beta \beta'} - \sum_n \frac{J_n J_M}{J_2} \sum_{t_3 \nu t_3 \nu'} \delta_{3\alpha t_3 \nu 3\alpha' t_3 \nu'} \delta_{3\mu t_3 \nu 3\mu' t_3 \nu'} K_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} \\ &\{ (-1)^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{M}}} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{M}} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} K_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} v_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \frac{(-1)^{M+1}}{E_{\hat{n}} + E_{\hat{M}}} F_{2\hat{n}} F_{2\hat{M}} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} \cdot \\ &D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} w_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \} + \frac{(-1)^{\frac{\pi}{2}}}{E_{\hat{n}} - E_{\hat{M}}} \delta_{M_n M_M} \delta_{T_{3n} T_{3M}} \left[\frac{3\mu 3\mu'}{F_{2\hat{n}} F_{2\hat{M}}} D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} \cdot \right. \\ &\left. v_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} + F_{2\hat{n}} F_{2\hat{M}} D_{3\alpha 3\alpha' 3\beta 3\beta'}^{JM} w_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'} \right] \end{aligned} \quad (D4.23)$$

gegeben. Setzt man nun (D4.21) in (D4.10) und (D4.11) ein, so erhält man ein homogenes Gleichungssystem in den Unbekannten

$F_{1\hat{B}}^{t_3 t_3}$ und $F_{2\hat{B}}^{t_3 t_3}$:

$$\sum_{t_3 \alpha' t_3 \alpha} \{ (\delta_{t_3 \beta' t_3 \alpha} \delta_{t_3 \beta' t_3 \alpha'} - D_{11 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{t_3 t_3 \beta \beta'}(E_{\hat{B}})) F_{1\hat{B}}^{t_3 \alpha' t_3 \alpha} - D_{12 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{t_3 t_3 \beta \beta'}(E_{\hat{B}}) F_{2\hat{B}}^{t_3 \alpha' t_3 \alpha} \} = 0 \quad (D4.24)$$

$$\sum_{t_3 \alpha' t_3 \alpha} \{ - D_{21 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{t_3 t_3 \beta \beta'}(E_{\hat{B}}) F_{1\hat{B}}^{t_3 \alpha' t_3 \alpha} + (\delta_{t_3 \beta' t_3 \alpha} \delta_{t_3 \beta' t_3 \alpha'} - D_{22 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{t_3 t_3 \beta \beta'}(E_{\hat{B}})) F_{2\hat{B}}^{t_3 \alpha' t_3 \alpha} \} = 0 \quad (D4.25)$$

Die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems, gleich Null gesetzt, ist die gesuchte Energiedispersionsrelation. Die Matricelemente dieses Gleichungssystems sind:

$$D_{\nu\mu}^{t_3 \beta' t_3 \beta}_{t_3 \alpha' t_3 \alpha}(E_{\hat{M}}) = \sum_{\beta\beta'} (n_{\beta} - n_{\beta'})^{-1} f_{\beta\beta'}^{-1}(E_{\hat{M}}) \left\{ \begin{matrix} w_{\beta\beta'}^{\beta\beta'} & \nu=1 & f_{1 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{\beta\beta'}(E_{\hat{M}}) & \mu=1 \\ v_{\beta\beta'}^{\beta\beta'} & \nu=2 & f_{2 t_3 \alpha' t_3 \alpha}^{\beta\beta'}(E_{\hat{M}}) & \mu=2 \end{matrix} \right\} \quad (D4.26)$$

Bis jetzt wurde ohne Isospinkopplung gerechnet. Das ist für Streuprozesse, bei denen die Coulomb-Wechselwirkung berücksichtigt werden muss (z.B. bei $^{15}\text{N}(p,n)^{16}\text{O}$), notwendig. Für Streuprozesse, die keine Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung erfordern (z.B. $^{15}\text{N}(n,n')^{15}\text{N}$), ist es vorteilhaft mit Isospinkopplung zu rechnen. Die Rechnungen mit Isospinkopplung sind völlig analog zu den obigen Rechnungen, so daß auf eine genauere Herleitung der Gleichungen verzichtet werden kann. Die zu (D4.24) und (D4.25) entsprechenden Gleichungen lauten in der Approximation des guten Isospins:

$$(1 - D_{11}^{t_3 t_3}(E_{\hat{B}})) F_{1\hat{B}}^{t_3 t_3} - D_{12}^{t_3 t_3}(E_{\hat{B}}) F_{2\hat{B}}^{t_3 t_3} = 0 \quad (D4.27)$$

$$- D_{21}^{t_3 t_3}(E_{\hat{B}}) F_{1\hat{B}}^{t_3 t_3} + (1 - D_{22}^{t_3 t_3}(E_{\hat{B}})) F_{2\hat{B}}^{t_3 t_3} = 0 \quad (D4.28)$$

Die Determinante des Gleichungssystems ist analog zu oben die reduzierte Dispersionsrelation. Für die Größen $D_{\nu\mu}^{t_3 t_3}$ ($\nu, \mu=1,2$) gilt:

$$D_{\nu\mu}^{t_3 t_3}(E_{\hat{M}}) = \sum_{\alpha'\alpha} (n_{\alpha'} - n_{\alpha})^{-1} f_{\alpha'\alpha}^{-1}(E_{\hat{M}}) \left\{ \begin{matrix} w_{\alpha'\alpha}^{\alpha'\alpha'} & \nu=1 & f_{1 \alpha' \alpha}^{\alpha'\alpha'}(E_{\hat{M}}) & \mu=1 \\ v_{\alpha'\alpha}^{\alpha'\alpha'} & \nu=2 & f_{2 \alpha' \alpha}^{\alpha'\alpha'}(E_{\hat{M}}) & \mu=2 \end{matrix} \right\} \quad (D4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}\bar{\alpha}' \\ f_1(E_{\bar{n}}) \\ \bar{\alpha}\bar{\alpha}' \\ f_2(E_{\bar{n}}) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} w_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} v_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} \end{array} \right\} \left[1 - \sum_n \frac{\delta_{J_n J_M} \delta_{T_n T_M}}{\hat{J}_M^2 \hat{T}_M^2} \left[\left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} |F_{1\bar{n}}|^2 \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} |F_{2\bar{n}}|^2 \end{array} \right\} (-)^{\pi} \frac{\delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}}}{E_{\bar{n}} + E_{\bar{M}}} + \right. \right. \\ &\left. \left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} |F_{1\bar{n}}|^2 \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} |F_{2\bar{n}}|^2 \end{array} \right\} (-)^{\pi} \frac{\delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}}}{E_{\bar{n}} - E_{\bar{M}}} \right] - \left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} w_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} v_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}'} \end{array} \right\} \sum_n \frac{\delta_{J_n J_M} \delta_{T_n T_M}}{\hat{J}_M^2 \hat{T}_M^2} \left[\left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} F_{2\bar{n}}^* \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} F_{1\bar{n}}^* \end{array} \right\} \right. \\ &\left. (-)^{J_M + 1} \delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}} + \left\{ \begin{array}{c} D_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} F_{1\bar{n}}^* F_{2\bar{n}}^* \\ K_{\bar{n}\bar{n}}^{JM} F_{1\bar{n}}^* F_{2\bar{n}}^* \end{array} \right\} (-)^{\pi} \frac{\delta_{M_n - M_M} \delta_{T_{3n} - T_{3M}}}{E_{\bar{n}} - E_{\bar{M}}} \right], (\alpha\alpha') \in \{(\bar{k}\bar{i}), (\bar{i}\bar{k})\} \end{aligned} \quad (D4.30)$$

Je nachdem, ob man nun ohne oder mit Isospinkopplung rechnen muss, werden die Bindungs- und Resonanz-Energien des Systems und damit auch die Breiten aus dem Nullsetzen der Determinante des Gleichungssystems (D4.24) bis (D4.25) bzw. des Gleichungssystems (D4.27) bis (D4.28) berechnet (s.a. Abschnitt C5).

D5. Die reduzierte T-Matrix und der integrierte Wirkungsquerschnitt

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes benötigt man die reduzierte T-Matrix. Die totale T-Matrix besteht aus zwei Anteilen (s. C6) : Dem Potentialanteil und dem Resonanzanteil:

$$\hat{T}_{ki,pj}(E_S) = -\frac{1}{\pi} (e^{i\delta_p} \delta_{pj} \delta_{pk} \delta_{ij} + \delta(E_S - E_{kl}) T_{kl,pj}^R(E_S)) \quad (D5.1)$$

wobei der Resonanzanteil durch (C6.8) gegeben ist, d.h.

$$T_{ki,pj}^R(E_S) = e^{i(\delta_p + \delta_k)} f_{ki}(E_S) \tilde{p}_{ki,S} \quad (D5.2)$$

Die Reduktion der vollen T-Matrix bedeutet nun, wie man aus

(D5.1) sieht, im wesentlichen die Reduktion des Resonanzanteils der T-Matrix. Die Vereinfachung des Resonanzanteils der T-Matrix ist nach (D5.2) die Reduktion der Kontinuum-Kontinuum-Teilchen-Loch-Amplitude $\tilde{\rho}_{ki,S}$. Diese ist definiert durch (C5.38):

$$\tilde{\rho}_{ki,S} = \delta_{kp} \delta_{ij} + \hat{f}_{ki}^{-1}(E_S) \{ \hat{f}_{1S}^{ki}(E_S) F_{1S} + \hat{f}_{2S}^{ki}(E_S) F_{2S} \} \quad (D5.3)$$

Für das reduzierte Matrixelement von $\tilde{\rho}_{ki,S}$ erhält man ohne Isospinkopplung analog zu (D4.21) den folgenden Ausdruck:

$$\langle 0 || \hat{B}_{\alpha\alpha'}^{jS} \hat{S} \rangle = \delta_{\hat{\alpha}p} \delta_{\hat{\alpha}j} \hat{P}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}^j + (n_{\hat{\alpha}} - n_{\hat{\alpha}'}) \hat{f}_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}(E_S) \sum_{\beta\beta\beta\beta} \{ \hat{f}_{1S}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}(E_S) F_{1S}^{\beta\beta\beta\beta} + \hat{f}_{2S}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}(E_S) F_{2S}^{\beta\beta\beta\beta} \} \quad (D5.4)$$

mit dem Phasenfaktor

$$P_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}'}^j = \hat{J}_S (-)^{j_{\hat{\alpha}} - j_{\hat{\alpha}'} - j_S} \quad (D5.5)$$

Die Hilfsgrößen $\hat{f}_{v\hat{t}\hat{t}_3}(E_S)$ ($v=1,2$) in (D5.5) sind durch die Gleichungen (D4.22) und (D4.23) gegeben, wenn dort $\hat{M}$ durch $\hat{S}$ ersetzt wird. Die beiden anderen Hilfsgrößen $F_{v\hat{S}}^{\hat{t}_3\hat{t}_3}$ ($v=1,2$) werden aus dem folgenden inhomogenen Gleichungssystem berechnet:

$$\sum_{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} \{ (\delta_{\hat{t}_3\hat{t}_3} \delta_{\hat{t}_3\hat{\alpha}} - D_{11\hat{t}_3\hat{\alpha}}^{\hat{t}_3\hat{t}_3}(E_S)) F_{1S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} - D_{12\hat{t}_3\hat{\alpha}}^{\hat{t}_3\hat{t}_3}(E_S) F_{2S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} \} = P_{pj}^j w_{pj} \delta_{\hat{t}_3\hat{t}_3} \delta_{\hat{t}_3\hat{\alpha}} \quad (D5.6)$$

$$\sum_{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} \{ -D_{21\hat{t}_3\hat{\alpha}}^{\hat{t}_3\hat{t}_3}(E_S) F_{1S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} + (\delta_{\hat{t}_3\hat{t}_3} \delta_{\hat{t}_3\hat{\alpha}} - D_{22\hat{t}_3\hat{\alpha}}^{\hat{t}_3\hat{t}_3}(E_S)) F_{2S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}} \} = P_{pj}^j v_{pj} \delta_{\hat{t}_3\hat{t}_3} \delta_{\hat{t}_3\hat{\alpha}} \quad (D5.7)$$

Die Matrixelemente des Gleichungssystems $D_{\nu\mu}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\alpha}}(E_S)$ erhält man aus (D4.26) durch Ersetzen von $\hat{M}$ durch $\hat{S}$. Damit erhält man aus (D5.1) für die reduzierte volle T-Matrix ohne Isospinkopplung den folgenden Ausdruck:

$$\hat{T}_{\hat{k}\hat{l},\hat{p}\hat{j}}(E_S) = -\frac{1}{\pi} (e^{i\delta_p} \delta_{\hat{k}\hat{p}} \delta_{\hat{l}\hat{j}} + e^{i(\delta_{\hat{p}} + \delta_{\hat{k}})}) \sum_{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\beta}} \{ \hat{f}_{1S}^{\hat{k}\hat{l}}(E_S) F_{1S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\beta}} + \hat{f}_{2S}^{\hat{k}\hat{l}}(E_S) F_{2S}^{\hat{t}_3\hat{t}_3\hat{\beta}} \} \delta(E_S - E_{\hat{k}\hat{l}}) \quad (D5.8)$$

Die Rechnungen für die Reduktion der totalen T-Matrix mit Isospinkopplung laufen völlig analog zu oben, so daß nur die

Endergebnisse erwähnt werden. Für die totale T-Matrix ergibt sich:

$$\hat{T}_{\vec{k}i, \vec{p}j}^{J_S T_S}(E_S) = -\frac{1}{\pi} i \delta_{\vec{p}} \sin \delta_{\vec{p}} \delta_{\vec{k}p} \delta_{ij} + \{ f_1^{ki}(E_S) F_{1\vec{S}} + f_2^{ki}(E_S) F_{2\vec{S}} \} \delta(E_S - E_{\vec{k}i}) e^{i(\delta_{\vec{k}} + \delta_{\vec{p}})} \quad (D5.9)$$

Die Größen $f_v^{ki}(E_S)$ ($v=1,2$) erhält man aus (D4.30) und $F_{v\vec{S}}$ ($v=1,2$) erhält man aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$(1 - D(E_S)) F_{1\vec{S}} - D(E_S) F_{2\vec{S}} = P_{pj}^{J_S T_S} w_{pj} \quad (D5.10)$$

$$-D(E_S) F_{1\vec{S}} + (1 - D(E_S)) F_{2\vec{S}} = P_{pj}^{J_S T_S} v_{pj} \quad (D5.11)$$

mit

$$P_{pj}^{J_S T_S} = \hat{J}_S \hat{T}_S^{(-)} \hat{J}_p^{J_S - J_j - J_S - T_S} \quad (D5.12)$$

wobei die Größen $D_{v\mu}$ ($v, \mu=1,2$) durch (D4.29) gegeben sind.

Der totale integrierte Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Nukleons an einen Ein-Loch-Kern im Anfangszustand $\hat{i}$ und im Endzustand $\hat{j}$ ergibt sich aus (Kim73) der folgenden Gleichung:

$$\sigma_{ij}^J = \sum_J \sigma_{ij}^J \quad (D5.13)$$

dabei ist σ_{ij}^J der partielle Wirkungsquerschnitt, der aus der Beziehung

$$\sigma_{ij}^J = \frac{2\pi^3 (2J+1)}{k^2 (2J+1)} \sum_{\vec{k}p} |\hat{T}_{\vec{k}i, \vec{p}j}^{J_S T_S}(E_S)|^2 \quad (D5.14)$$

berechnet wird.

Der Querschnitt für den Fall des guten Isospins wird ebenso definiert.

E. Einteilchenmodellbasis und die Kernparameter

Im Abschnitt (E1) werden die Einteilchen-Wellenfunktionen für gebundene- und Streu-Zustände sowie die Wahl des Schalenmodellpotentials besprochen (Bal66, Weig70). Anschließend wird im Abschnitt (E2) die bei dieser Arbeit benutzten Einteilchen-Energien, Einteilchen-Parameter und die Parameter der Restwechselwirkung angegeben. Schließlich werden im Unterkapitel (E3) die verschiedenen mathematischen Lösungsmethoden, die bei dieser Arbeit verwendet wurden, ausführlich besprochen.

E1. Wahl der Wechselwirkung für die

Einteilchenmodellbasis

Für die Wellenfunktion der gebundenen Ein-Teilchen- und Ein-Loch-Zustände werden die Eigenfunktionen eines harmonischen Oszillators verwendet. Der Radialanteil dieser Wellenfunktion ist gegeben durch

$$R_{\alpha}(r) = \left[\frac{2 (n_{\alpha})!}{\Gamma(n_{\alpha}+1/2)} \right]^{1/2} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2} L_{n_{\alpha}}^{1/2} \left(\left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \right) \quad (E1.1)$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{\hbar}{m \cdot \omega_{\text{osz}}} \right)^{1/2} \quad (E1.2)$$

Die verallgemeinerten Laguerre-Polynome L_n^{α} sind in "Abramowitz and Stegun" (Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1965) definiert. Die Oszillatorfrequenz ω_{osz} ist ein Maß für die Stärke des Potentials, mit α bezeichnet man die Oszillatorlänge. In dieser Arbeit wird die in der Kernphysik empirisch gut bestätigte Wahl

$$\omega_{\text{osz}} = 41 \text{ A}^{-1/3} \quad , \quad \alpha = \sqrt{1.01209 \cdot \text{A}^{1/3}} \quad (E1.3)$$

getroffen. Die auf Kontinuum erweiterte RPA benötigt zusätzlich ein Einteilchenpotential, das die Einteilchenenergien und Wellenfunktionen für die Kontinuumsrechnung definiert.

Hier wird das Woods-Saxon-Potential

$$V_{(r)}^{\uparrow 3} = V_0^{\uparrow 3} \left[1 + e^{\frac{-(r-R)/a}{1}} \right]^{-1} - V_{\text{is}}^{\uparrow 3} \left(\frac{\hbar}{m\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[1 + e^{\frac{-(r-R)/a}{1}} \right]^{-1} \vec{1} \vec{s} + (1/2 + t_3) V_C(r) \quad (E1.4)$$

verwendet und damit die Schrödingergleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1(1+1)}{r^2} + \frac{2 m_{\text{red}}}{\hbar^2} V_{(r)}^{\uparrow 3} \right\} (r R_{\alpha}(r)) = 0 \quad (E1.5)$$

gelöst. $V_0^{\uparrow 3}$ ist die Tiefe des Zentralpotentials, $V_{\text{is}}^{\uparrow 3}$ die Tiefe des Spinbahnpotentials, R' bezeichnet den Radius, a die Oberflächendicke. Ferner ist $\left(\frac{\hbar}{m c} \right)^2 = 2(\text{fm})^2$. Das Coulomb-Potential $V_C(r)$ wird von einer homogenen Kugel mit dem Radius $R' = r_0 (A-1)^{1/3}$ erzeugt

$$V_C(r) = \begin{cases} (Z-1) e^2 / r, & r \leq R' \\ (Z-1) e^2 / (2R') [3 - r^2/R'^2], & r \geq R' \end{cases} \quad (E1.6)$$

m_{red} steht für die reduzierte Masse $m_{\text{red}} = m_{\alpha} (A-1) / A$.

Die Eigenfunktionen der Schrödingergleichung (E1.5) werden durch den Bahndrehimpuls l , dem Gesamtdrehimpuls j und der dritten Isospinkomponente t_3 klassifiziert.

Außer einer Reihe von gebundenen Lösungen $R_{\alpha}(r)$ mit Einteilchenenergien ϵ_{α} existieren für jede positive Energie ϵ Streulösungen $R_{\alpha}(r)$, deren Normierung lautet:

$$\int_0^{\infty} r^2 dr R_{\alpha}(r) R_{\alpha'}(r) = \delta_{l l'} \delta_{j j'} \delta_{t_3 t_3'} \delta(\epsilon - \epsilon') \quad (E1.7)$$

Das entsprechende asymptotische Verhalten der Einteilchenwellenfunktion ist gegeben durch

$$R_{\alpha}(r) \xrightarrow{|r| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 m_{\text{red}}}{\pi \hbar^2 k}} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \sum_{m_s} \begin{pmatrix} l & 1/2 & j \\ m_s & m_s & m_s \end{pmatrix} Y_{lm-m_s}^{\uparrow 3}(r) \sin(kr + \delta(k) - 1/2 \pi l + (1/2 + t_3) \alpha(k, r)) \quad (E1.8)$$

Hier bezeichnet δ_{lj} und α_{lj} die durch das Kernpotential und die

durch das Coulombpotential erzeugten Streuphasen (Yos36, Gor28, Mot28). η' ist der Coulombparameter $\eta' = m_{red} (Z-1) \cdot e^2 / (k \hbar^2)$. Für

σ_{lj} gilt:

$$\sigma_{lj}(kr, \eta') = \sigma_{lj}^C(\eta') - \eta' \ln(2kr), \quad \sigma_{lj}^C(\eta') = \arg \Gamma(1 + i\eta') \quad (E1.9)$$

Nun einige Worte über die Kontinuumszustände, die einen scharfen Einteilchen-Resonanz enthalten (z.B. die $1d_{3/2}$ - Resonanz bei ^{16}O): Diese Zustände werden wie diskrete Zustände behandelt (und daher auch in die Strukturrechnung einbezogen). Eine nähere Begründung dafür lautet: Wenn man die Kontinuumswellenfunktionen nur im Kerninneren genau zu kennen braucht, was in dieser Arbeit wegen der Struktur der Matrixelemente zutrifft, kann man sie in der Nähe einer Einteilchenresonanz wie folgt approximieren (Ung67, Weig70, Bal66):

$$R_{\alpha}(\vec{r}) = \left\{ \frac{\gamma/2\pi}{(\epsilon_p - \epsilon_r)^2 + \gamma^2/4} \right\}^{1/2} \xi_{\alpha}(\vec{r}) \quad (E1.10)$$

wobei ϵ_r die Lage und γ die Breite der Einteilchenresonanz ist.

Für den Resonanzzustand $\xi_{\alpha}(\vec{r})$ gilt:

$$\int d\vec{r} |\xi_{\alpha}(\vec{r})|^2 = 1 \quad (E1.11)$$

Wenn nun die Einteilchenresonanz sehr scharf ist, so folgt aus (E1.10) wegen der Beziehung

$$\frac{2i\delta}{x^2 + \delta^2} = 2\pi i \delta(x) \quad (E1.12)$$

daß die gesamte resonante Partialwelle $R_{\alpha}(r)$ durch die Wellenfunktion eines quasigebundenen Zustandes approximiert wird.

Aufgrund dieser Begründung ist es zweckmäßig die scharfen resonanten Partialwellen wie gebundene Zustände zu behandeln.

Die Parameter des Woods-Saxon-Potentials werden so gewählt, daß die experimentellen Einteilchen-Energien möglichst genau wiedergegeben werden. Die derart erhaltenen Parameter für ^{16}O sind in Tabelle (II) aufgeführt.

E2. Die verwendeten Kernparameter

Für die Strukturrechnung von ^{16}O bzw. ^{16}N wurden die Einteilchen- bzw. Ein-Loch-Energien dem Experiment entnommen. Die benutzten Einteilchen bzw. Ein-Loch-Energien sind in der folgenden Tabelle (I) aufgeführt.

n	l	j	Spektroskopische Bezeichnung	$\epsilon_3^{-1/2}$ (Mev)	$\epsilon_3^{1/2}$ (Mev)
0	2	3/2	1d 3/2	0.93	4.50
1	0	1/2	2s 1/2	-3.27	-0.10
0	2	5/2	1d 5/2	-4.14	-0.60
0	1	1/2	$^{-1}1p_{1/2}$	-15.60	-12.10
0	1	3/2	$^{-1}1p_{3/2}$	21.84	-18.34

Tab. I

Die Parameter des Woods-Saxon-Potentials (E1.4) wurden so gewählt, daß die in der Tabelle (I) aufgeführten experimentellen Einteilchenenergien genau wiedergegeben wurden. Diese Parameter sind in der folgenden Tabelle (II) zusammengefasst.

Einteilchen- zustände	$V_0^{1/2}$ (Mev)	$V_{1s}^{1/2}$ (Mev)	$V_0^{-1/2}$ (Mev)	$V_{1s}^{-1/2}$ (Mev)	$\epsilon_3^{1/2}$ (Mev)	$\epsilon_3^{-1/2}$ (Mev)
1d 3/2	57.87	5.27	54.946	5.27	4.50 - i 0.46	0.93 - i 0.045
2s 1/2	59.21	—	56.900	—	-0.10	-3.27
1d 5/2	58.06	5.27	55.010	5.27	-0.60	-4.15
$^{-1}1p_{1/2}$	60.95	9.89	57.390	9.64	-12.10	-15.60
$^{-1}1p_{3/2}$	60.95	9.89	57.390	9.64	-18.34	-21.84

Tab. II

Für den reduzierten Radius r , die Oberflächendicke a' und der reduzierten Masse m_{red} wurden folgende Werte verwendet:

$$r_0 = 1.25 \text{ (fm)} \quad , \quad a' = 0.53 \text{ (fm)} \quad , \quad m_{\text{red}} = 15/16. \quad (\text{E2.1})$$

Mit diesen Parametern wurde erreicht, daß im relevanten Bereich $r \leq 5 \text{ (fm)}$ das Woods-Saxon-Potential nur gering von dem Oszillatorpotential abweicht und damit sich die Einteilchenwellenfunktionen für Oszillator- und Woods-Saxon-Potential nur wenig voneinander unterscheiden (s.a. Abbildung 2).

Für die Parameter der Surface Delta Interaction wurden folgende Werte verwendet:

$$R^{16}\text{O} = R^{16}\text{N} = 3.15 \text{ (fm)} \quad (\text{E22})$$

$$V_0(^{16}\text{O}) = 1650 \text{ (Mev fm}^3\text{)} \quad ; \quad V_0(^{16}\text{N}) = 1700 \text{ (Mev fm}^3\text{)} \quad ; \quad \eta = 0.135 \quad (\text{E23})$$

Für die Renormierungskonstanten z (s. B3) wurde bei den gebundenen Zuständen der feste Wert $z = 0.79$ und für die Zustände aus dem Kontinuum - also auch für den $1d_{3/2}$ Zustand - $z=1$ gewählt (vgl. Vog72, Sch76).

E3. Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt werden verschiedene mathematische Methoden, die bei dieser Arbeit für die Berechnung der Einteilchenstreuwellenfunktionen, der Diagonalisierung des konventionellen RPA-Gleichungssystems (C3.8) und der Nullstellen der Dispersionsrelation (C5.29) benutzt wurden, zusammenfassend erläutert. Zur Berechnung der Einteilchen-Streuwellenfunktionen aus der Schrödingergleichung (E1.5) wurde das Runge-Kutta-Verfahren verwendet (Wil71, Hun61). Der Funktionswert und die erste

Ableitung der Wellenfunktion für kleine r -Werte, die als Startwerte in diesem Verfahren eingehen, wurden aus

$$R_{\alpha}^{(r)} = r^{l+1} \quad (E31)$$

und

$$R_{\alpha}'^{(r)} = (l+1) r^l \quad (E32)$$

berechnet.

Die Eigenwerte des konventionellen RPA-Gleichungssystems (C3.8), deren Matrix nichtsymmetrisch ist, wurden durch die doppelte quadratische Iteration von Francis (Fra61, Fra62, Wilk65), wobei auch komplexe Lösungen zugelassen werden, berechnet. Für alle reellen, positiven Eigenwerte wurde Wielandts inverse Iteration in der verbesserten Form von (Wal66) zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren benutzt.

Die Nullstellen der Energiedispersionsrelation (C5.29) wurden mit dem Iterationsverfahren von Müller (Mül56) berechnet. Dieses Verfahren ist eines der modernsten, schnellsten und sichersten heute verfügbaren Methoden zur Bestimmung isoliertliegenden Nullstellen, wobei diese reell oder komplex sein können.

Die Hauptwertintegrale wurden nach folgender Methode

$$\int_0^{E_{\max}} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon'} = g(\varepsilon') \int_0^{E_{\max}} d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'} + \int_0^a d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} + \int_{a+\delta}^{E_{\max}} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} + \int_a^{a+\delta} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} \quad \varepsilon' \in [a, a+\delta] \quad (E3.3)$$

berechnet, wobei δ eine kleine positive Größe ist. Die ersten drei Terme auf der rechten Seite von (E3.3) sind gewöhnliche Integrale und sie bleiben endlich, da $E_{\max}$ endlich bleibt. Der

vierte Term lässt sich für kleine δ durch

$$\int_a^{a+\delta} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} = g'(\varepsilon') \delta \quad (E3.4)$$

approximiert. Damit erhält man für (E3.3):

$$\int_0^{E_{\max}} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon'} = g(\varepsilon') \ln |(E_{\max} - \varepsilon')/\varepsilon'| + \int_0^a d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} + \int_{a+\delta}^{E_{\max}} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon) - g(\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} + g'(\varepsilon') \delta \quad (\text{E3.5})$$

Die zwei Integrale auf der rechten Seite von (E3.5) werden durch 10-Punkt-Gauß-Integration ausgerechnet.

F. Ergebnisse und Diskussion

Um die Verträglichkeit der angegebenen Theorie mit experimentellen Daten zu überprüfen, haben wir die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ den elastischen Streuprozess $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ und den inelastischen Streuprozess $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}^*$ berechnet. Als Target für diese Prozesse wurde der Ein-Proton-Loch-Kern $(1p_{1/2}^{-1})^{16}\text{O}$ gewählt. Die Compoundzustände der Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ sind gerade die angeregten Zustände des doppeltmagischen Kernes ^{16}O , während die Compoundzustände des elastischen und inelastischen Streuprozesses die Anregungszustände von ^{16}N ergeben. Wir hoffen so diejenigen Zustände zu beschreiben, die sich als Superposition von Ein-Teilchen-Ein-Loch-Anregungen aus dem Grundzustand deuten lassen. Das sind niedrige Zustände negativer Parität, bei denen Zwei-Teilchen-Zwei-Loch-Anregungen aus Paritätsgründen keine Rolle spielen und erst Drei-Teilchen-Drei-Loch-Zustände Konfigurationsmischungen erzeugen können.

Die berechneten Anregungsenergien hängen sehr stark von den Einteilchenenergien der gebundenen Zustände ab. Für diese haben wir die experimentell ermittelten Werte (Pro68) genommen, da dies sicherlich die beste Wahl darstellt. Für die Wellenfunktion der gebundenen Einteilchenzustände wurden die Eigenfunktionen eines harmonischen Oszillators verwendet. Die Einteilchenstreuwellenfunktionen wurden aus einem Woods-Saxon-Potential berechnet. Mit den in (E2) angegebenen Parametern wurde erreicht, daß sich Oszillator- und Woods-Saxon-Potential nur wenig voneinander unterscheiden und damit die entsprechenden Wellenfunktionen gut miteinander übereinstimmen. Dieser Sachverhalt ist für den $1d_{3/2}$ -Zustand ($t_3 = -\frac{1}{2}$) in Abbildung 1

illustriert. Für Protonen wurde die Coulomb-Abstoßung berücksichtigt. Die sich daraus ergebende Änderung des Woods-Saxon-Potentials für Protonen und Neutronen ist in Abbildung 3 dargestellt.

Das Einteilchenkontinuum für Protonen und Neutronen wurde bis ca. 400 (mev) in die Rechnungen einbezogen, d.h. es wurden alle $s_{1/2}$, $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, $d_{3/2}$, $d_{5/2}$ -Einteilchenzustände für Protonen und Neutronen bis ca. 400 (Mev) berücksichtigt.

Neben dem Energiespektrum des Compoundsystems wurden in dieser Arbeit auch die totalen und partiellen Wirkungsquerschnitte für die beiden Reaktionen berechnet. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten, soweit sie bekannt sind, ist befriedigend.

F1. Die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$

Für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ wurde die Strukturrechnung mit der SDI als Restwechselwirkung durchgeführt. Die Entsprechenden Ergebnisse sind in der Tabelle III angegeben. Zum Vergleich sind die Ergebnisse von Haug (Puff) (Hau70), Vogeler (Mig) (Vog72) und dem Experiment eingetragen. Der Vergleich zeigt, daß die SDI die experimentellen Daten im Mittel am besten reproduziert. Deshalb wurden bei den anschließenden Rechnungen mit Einschluß des Kontinuums, bei denen ebenfalls die SDI als Restwechselwirkung verwendet wurde, die mit der SDI berechneten Strukturwerte eingesetzt. Um die Coulomb-Wechselwirkung zu berücksichtigen, wurden die Kontinuumsrechnungen ohne Isospinkopplung

durchgeführt. Die zugehörigen Ergebnisse sind in der Tabelle IV zusammengefasst. Gemeint sind die Werte in den Spalten zwei und drei. Diese ohne Isospinkopplung berechneten Werte sind so in Tabelle IV eingetragen, daß in der Sprache des guten Isospins die erste Hälfte eines jeden Kästchens den niedrig liegenden $T=0$ -Zuständen und die zweite Hälfte den höher liegenden $T=1$ -Zuständen entspricht.

Die $(\bar{0})$ -Zustände werden durch Einschluß des Kontinuums alle in die komplexe Energieebene verschoben, d.h. sie werden zu Resonanzzuständen. Die Realteile der Resonanzzustände haben sich dabei im Vergleich zur Strukturrechnung nur wenig geändert.

Wie bei der Strukturrechnung liegt der Realteil des ersten $(\bar{0})$ -Zustandes um 1.35 (Mev) höher als der experimentelle Wert. Für dieses Niveau konnte Haug (Hau70) zeigen, daß die Puffsche Kraft unter Verwendung einer realistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ein gutes Ergebnis liefert. Als Breite für dieses Niveau erhalten wir einen sehr kleinen Wert; experimentelle Daten für die Breite liegen nicht vor. Im Gegensatz zum ersten $(\bar{0})$ -Zustand stimmen beim dritten $(\bar{0})$ -Zustand sowohl der Realteil als auch die Breite gut mit dem Experiment überein, wie aus der Tabelle IV zu entnehmen ist.

Die $(\bar{1})$ -Zustände rücken bei der Erweiterung des Konfigurationsraumes durch die Hinzunahme des Kontinuums ebenfalls alle in die komplexe Energieebene. Wie bei den $(\bar{0})$ -Zuständen ändern sich die Resonanzlagen im Rahmen der numerischen Genauigkeit nicht. Für die ersten drei $(\bar{1})$ -Zustände ergeben sich in allen früheren wie auch den jetzigen Rechnungen niemals drei $(\bar{1})$ -Anregungen unterhalb von 16-18 (Mev), während solche Niveaus

bei 7.12, 9.58 und 12.43 (Mev) beobachtet werden. Eine Erklärung hierfür scheint das Auftreten von $3p-3h$ -Zuständen in diesem Energiebereich (Zam65) zu liefern, welche stark mit den $1p-1h$ -Zuständen mischen. Die letzten fünf ($\bar{1}$)-Zustände stimmen in der Resonanzlage gut mit dem Experiment überein, während die berechneten Breiten kleiner als die experimentellen sind. Wir vermuten, daß diese durch Verwendung von Einteilchen-Wellenfunktionen aus einer selbstkonsistenten Hartree-Fock-Rechnung etwas verbessert werden könnten. Die vermutliche Ursache scheint die Kopplung mit $3p-3h$ -Zuständen zu sein. Ferner zeigten Rechnungen von Hanna (Han69), daß eine Änderung der Energieschwelle die Breiten wesentlich beeinflusst.

Die Situation bei den ($\bar{2}$)-Zuständen ist ähnlich wie bei den ($\bar{1}$)-Zuständen. Die ersten drei ($\bar{2}$)-Zustände enthalten starke $3p-3h$ -Beimischungen. Der sechste ($\bar{2}$)-Zustand stimmt in der Resonanzlage gut mit dem Experiment überein, während die Breite im Vergleich zum Experiment zu klein ist. Auch hier wird vermutet, daß die Übereinstimmung mit dem Experiment durch die Kopplung von $3p-3h$ -Anregungen und selbstkonsistente Rechnungen verbessert werden kann.

Als einziger Zustand hat der gebundene ($\bar{3}$)-Zustand durch die Hinzunahme des Kontinuums eine merkliche Verschiebung von 6.54 auf 6.35 (Mev) erfahren. Der zweite und der dritte ($\bar{3}$)-Zustand enthalten starke $3p-3h$ Beimischungen und wird bei unseren Rechnungen entsprechend ungenau wiedergegeben. Der vierte ($\bar{3}$)-Zustand stimmt in der Resonanzlage mit dem Experiment gut überein, die Breite dagegen ist klein. Eine Verbesserung der Breiten

erwartet man auch hier von Hinzunahme der $3p-3h$ -Anregung, der selbstkonsistenten Hartree-Fock-Rechnungen und Verschieben der Energieschwelle (Han69).

Wir haben auch zwei ($\bar{4}$)-Niveaus berechnet, für welche jedoch keine Meßwerte zum Vergleich vorliegen.

Um die quantitative Abhängigkeit der Energien des Systems von einer weiteren Hinzunahme des Einteilchenkontinuums zu untersuchen, wurden als Beispiel die ersten drei Energien des ($\bar{3}$)-Zustandes gewählt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle V eingetragen. Man sieht, daß der wesentliche Beitrag zur Verschiebung der Energien aus der Hinzunahme der Einteilchenzustände bis ca. 60 (Mev) stammt. Eine weitere Hinzunahme des Kontinuums bewirkt eine sehr geringfügige Änderung der Energien.

Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ ist in Abbildung 11 dargestellt. Zum Vergleich mit dem Experiment wurden die in den Arbeiten (Hans63) und (Won61) angegebenen Werte herangezogen. Die in den Originalarbeiten angegebenen Fehlerschranken von ungefähr ± 20 (mb) bei kleinen Einschüßenergien sind der Übersichtlichkeit halber nicht in Abbildung 11 aufgenommen worden. Unter etwa 4.5 (Mev) Einschüßenergie liegen keine experimentellen Daten vor. Wir finden in diesem Bereich zwei ausgeprägte Resonanzen. Im Bereich von 5.5 (Mev) bis 7 (Mev) finden wir drei Resonanzen, die sich auch in den experimentellen Daten ankündigen. Bei etwa 6.25 (Mev) Einschüßenergie liefern sowohl die Rechnung wie auch die experimentellen Daten eine ausgeprägte Resonanz. Im Bereich von 8 (Mev) bis 9 (Mev) deuten die experimentellen Werte auf ein

flaches Maximum hin, während die Rechnung eine stärkere und eine schwächere Resonanz liefert. Über 10 (Mev) Einschußenergie sind die experimentellen Daten zu unvollständig für einen Vergleich mit der Rechnung. Wir finden zwischen 10 (Mev) und 12 (Mev) Einschußenergie relativ schwache Resonanzen; eine weitere Resonanz deutet sich bei etwa 13.25 (Mev) an.

Die berechneten partiellen Wirkungsquerschnitte für die Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ und für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,h)^{15}\text{O}^*$ sind in den Abbildungen 3 bis 10 dargestellt. Die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ bedeutet, daß der Target nach der Reaktion durch den Ein-Neutron-Loch-Kern $(1p_{1/2}^{-1}, 116_{0;0})$ gegeben ist. Die Energiebilanz (s. (E2), Tab. II) ergibt für die Reaktionsschwelle der Ladungsaustauschreaktion 3.5 (Mev). Bei der Reaktion $^{15}\text{N}(p,h)^{15}\text{O}^*$ wird der Target im Endzustand durch den Ein-Neutron-Loch-Kern $(1p_{3/2}^{-1}, 116_{0;0})$ beschrieben. Die Reaktionsschwelle dieser Reaktion liegt bei 9.68 (Mev).

Für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$ zeigen die bei dieser Arbeit berechneten partiellen Wirkungsquerschnitte gute Übereinstimmung mit den in (Han69) angegebenen partiellen Wirkungsquerschnitten, die von Hanna im Rahmen der Feshbachschen Theorie der gekoppelten Kanäle berechnet wurden. Für die andere Reaktion finden sich in der Literatur keine Vergleichswerte.

F2. Die Reaktion $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$

Die Anwendung der Theorie auf die Reaktion $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ ist in folgender Hinsicht interessant. Von B.Pöppel und G.Schütte (Pöp70) wurde die genannte Reaktion im Rahmen der Tamm-Dancoff-Approximation (TDA) mit der SDI als Restwechselwirkung behandelt, wobei sie die Weinberg-Methode verwendeten. Da wir für die Restwechselwirkung ebenfalls die SDI ansetzten, ergibt sich so die Möglichkeit eines direkten Vergleichs zwischen der RPA-Theorie und der Tamm-Dancoff-Methode.

Die $T=1$ -Niveaus aus der Tabelle III sind im wesentlichen dadurch gekennzeichnet, daß ihre Loch-Teilchen-Amplituden verschwinden. Es ist daher zu erwarten, daß die RPA und TDA im Rahmen der numerischen Genauigkeit die gleichen Ergebnisse liefern. In Tabelle VI werden die Ergebnisse der Strukturrechnung, der Rechnung mit Einschluß des Kontinuums und zum Vergleich die Ergebnisse von B.Pöppel und G.Schütte angegeben. Man sieht, daß erstens die Hinzunahme des Kontinuums die Realteile der Energie-Niveaus nicht merklich verändert und zweitens die RPA-Theorie im wesentlichen die gleichen Werte wie die Tamm-Dancoff-Approximation liefert, wie es zu erwarten war. Für eine ausführlichere Diskussion der Ergebnisse für die Reaktion $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ verweisen wir daher auf die Arbeiten (Pöp70) und (Ebe67).

Für den totalen elastischen und inelastischen Wirkungsquerschnitt, die in dieser Arbeit berechnet wurden, sind in (Pöp70) keine Vergleichswerte angeführt. In der Arbeit von

C.B.Dover (Dov71) sind Werte für den totalen elastischen Wirkungsquerschnitt der Reaktion $^{15}\text{N}(n,n)^{15}\text{N}$ angegeben, die mit der TDA unter Verwendung einer Kontaktkraft berechnet wurden. Der Vergleich mit unseren Ergebnissen zeigt, daß die beiden Theorien auch für den Querschnitt im wesentlichen dieselben Werte liefern.

Anhang I

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen aus dem Abschnitt (C5) hergeleitet. Es sind diese der Reihe nach die Gleichungen (C5.11), (C5.12), (C5.14), (C5.27), und (C5.35). Nach (C2.2) sowie (C2.6) gilt:

$$(E_M + \epsilon_{\alpha'} - \epsilon_{\alpha}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} = - \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M}, \quad (\delta\delta') \in \{(ri)|(ir)\} \quad (1.1)$$

damaus folgt:

$$E_M \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} = (\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} - (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \quad (1.2)$$

Addiert man auf beiden Seiten $E_n \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M}$, so erhält man:

$$(E_n + E_M) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} = (E_n + \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} - (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \quad (1.3)$$

Diese Gleichung wird mit $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} (n_{\alpha} - n_{\alpha'})$ multipliziert und anschließend über α, α' summiert:

$$(E_n + E_M) \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} = \sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) (E_n + \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} - 2\pi \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'})^2 \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\delta\delta',n} \quad (1.4)$$

Mit Hilfe von (C2.3) kann man schreiben

$$(E_n + \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} = (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) 2\pi \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',n} \quad (1.5)$$

Damit erhält man für die erste Summe der rechten Seite von (1.4):

$$\sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'}) (E_n + \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha'}) \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} = \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'})^2 \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',M} \tilde{\rho}_{\delta\delta',n} \quad (1.6)$$

Die zweite Summe von (1.4) lässt sich unter Berücksichtigung von $\sum = \sum' + \sum''$, wie folgt schreiben:

$$\sum_{\alpha\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} = \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} + \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha',n} \quad (1.7)$$

Einsetzen von (I.6) und (I.7) in (I.4) ergibt nach Wegkürzen zweier Doppelsummen

$$(E_n + E_M) \sum_{\alpha\alpha'}^{(n-n_{\alpha'})} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} = -2\pi \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \quad (I.8)$$

Mit der Definitionsgleichung (C3.6), also

$$\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = \sum_{\alpha\alpha'}^{(n-n_{\alpha'})} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \quad (I.9)$$

bekommt man daraus die Beziehung (C5.11)

$$(E_n + E_M) \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = -2\pi \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} \tilde{I}_{\alpha\delta'\alpha\delta} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \quad (C5.11)$$

Die Herleitung der Gleichung (C5.12) verläuft völlig analog.

Zur Herleitung von (C5.14) gehen wir von (C5.11) aus und benutzen den separablen Ansatz (C5.13) für die Kraft. Man erhält:

$$(E_n + E_M) \langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = - \left\{ D \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} w_{\alpha\delta} w_{\delta\delta'} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} + K \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\delta\delta'} v_{\alpha\delta} v_{\delta\delta'} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \tilde{\rho}_{\delta\delta',M} \right\} \quad (I.10)$$

Berücksichtigt man nun die Definitionsgleichungen (C5.16) bis (C5.19), so erhält man (C5.14):

$$\langle 0 | \hat{Q} | M \rangle = - \left\{ D F_{1n} F_{1M} + K F_{2n} F_{2M} \right\} \frac{1}{E_n + E_M} \quad (C5.14)$$

(C3.16) wird analog hergeleitet. Um die Dispersionsrelation (C5.27) zu bekommen, geht man von den Definitionsgleichungen (C5.18) und (C5.19) aus. Für die weitere Rechnung werden die Gleichungen (C5.25) und (C5.26) aufgeschrieben:

$$\tilde{\rho}_{ki,B}^{-1} = f_{ki,B}^{-1}(E) \left\{ f_{1B}^{ki}(E) F_{1B} + f_{2B}^{ki}(E) F_{2B} \right\} \quad (C5.25)$$

$$\tilde{\rho}_{ik,B}^{-1} = f_{ik,B}^{-1}(E) \left\{ f_{1B}^{ik}(E) F_{1B} + f_{2B}^{ik}(E) F_{2B} \right\} \quad (C5.26)$$

(C5.18) und (C5.19) lassen sich unter Berücksichtigung von (C5.10) wie folgt aufspalten:

$$F_{1B} = \sum_{ik} \{ w_{ik} \tilde{\rho}_{kiB} + w_{ki} \tilde{\rho}_{ikB} \} \quad (I.11)$$

$$F_{2B} = \sum_{ik} \{ v_{ik} \tilde{\rho}_{kiB} + v_{ki} \tilde{\rho}_{ikB} \} \quad (I.12)$$

Einsetzen von (C5.25) und (C5.26) in diesen beiden Ausdrücken ergeben nach leichter Umformung

$$F_{1B} = \sum_{ik} \{ w_{ik} f(E) f(E)_{kiB}^{1B} - w_{ki} f(E) f(E)_{ikB}^{1B} \} F_{1B} + \sum_{ik} \{ w_{ik} f(E) f(E)_{kiB}^{2B} - w_{ki} f(E) f(E)_{ikB}^{2B} \} F_{2B} \quad (I.13)$$

$$F_{2B} = \sum_{ik} \{ v_{ik} f(E) f(E)_{kiB}^{1B} - v_{ki} f(E) f(E)_{ikB}^{1B} \} F_{1B} + \sum_{ik} \{ v_{ik} f(E) f(E)_{kiB}^{2B} - v_{ki} f(E) f(E)_{ikB}^{2B} \} F_{2B} \quad (I.14)$$

woraus mit

$$D(E) = \sum_{\nu\mu} \{ n_{\alpha\alpha'} - n_{\alpha'}^{-1} \} f_{\alpha\alpha'B}^{1B} \left\{ \begin{array}{cc} w_{\alpha\alpha'} \nu=1 & f_1^{\alpha\alpha'} \mu=1 \\ v_{\alpha\alpha'} \nu=2 & f_2^{\alpha\alpha'} \mu=2 \end{array} \right\} \quad (I.15)$$

das homogene Gleichungssystem (C5.28) folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 - D(E)_{11B} & -D(E)_{12B} \\ -D(E)_{21B} & 1 - D(E)_{22B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_{1B} \\ F_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C5.27)$$

Das inhomogene Gleichungssystem (C5.39) erhält man durch ganz analoge Schritte. Zu letzt wird der Ausdruck (C5.35) hergeleitet. Hierzu gehen wir von der Normierungsbedingung für den gebundenen Zustand $|B\rangle$ des Compoundsystems aus. Die Bedingung

$\langle B|B \rangle = 1$ bedeutet:

$$\sum_{\alpha\alpha'} (n_{\alpha} - n_{\alpha'}^{-1}) |\tilde{\rho}_{\alpha\alpha'B}|^2 = 1 \quad (I.16)$$

Die Zerlegung in diskreten- und kontinuierlichen Teilen ergibt (I.16):

$$\sum_{ri} \{ |\tilde{\rho}_{riB}|^2 - |\tilde{\rho}_{irB}|^2 \} + \sum_{ki} \{ |\tilde{\rho}_{kiB}|^2 - |\tilde{\rho}_{ikB}|^2 \} = 1 \quad (I.17)$$

Zur Berechnung von $\tilde{\rho}_{\alpha\alpha'B}$ mit $(\alpha\alpha') \in \{ (ri), (ir) \}$ wird (C5.8)

unter Zuhilfenahme der Gleichungen (C5.14) und (C5.15) in geeigneter Weise umgeformt:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\alpha\beta} = & -D \sum_n \left\{ F_{1n} \frac{1}{E_n + E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}^* + F_{1n}^* \frac{1}{E_n - E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \right\} F_{1B} - \\ & K \sum_n \left\{ F_{2n} \frac{1}{E_n + E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}^* + F_{2n}^* \frac{1}{E_n - E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \right\} F_{2B} \end{aligned} \quad (I.18)$$

Mit (C5.36) wird F_{2B} aus (C5.25), (C5.26) sowie (I.18) eliminiert. Damit lauten die neuen Gleichungen:

$$\tilde{\rho}_{ki,B} = f_{ki,B}^{-1} \left\{ f_{ki,B}^{(1)} + f_{ki,B}^{(2)} (1 - D_{11,B}(E)) / D_{12,B}(E) \right\} F_{1B} \quad (I.19)$$

$$\tilde{\rho}_{ik,B} = -f_{ik,B}^{-1} \left\{ f_{ik,B}^{(1)} + f_{ik,B}^{(2)} (1 - D_{11,B}(E)) / D_{12,B}(E) \right\} F_{1B} \quad (I.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\alpha\beta} = & \left\{ -D \sum_n \left\{ F_{1n} \frac{1}{E_n + E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}^* + F_{1n}^* \frac{1}{E_n - E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \right\} - \right. \\ & \left. K \sum_n \left\{ F_{2n} \frac{1}{E_n + E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n}^* + F_{2n}^* \frac{1}{E_n - E_B} \tilde{\rho}_{\alpha\alpha,n} \frac{(1 - D_{11,B}(E))}{D_{12,B}(E)} \right\} \right\} F_{1B}, (\alpha\beta) \in \{(n), (n)\}. \end{aligned} \quad (I.21)$$

Setzt man nun (I.19) bis (I.21) in (I.17) ein und dividiert beide Seiten durch den gemeinsamen Faktor von $|F_{1B}|^2$, so erhält man die Bestimmungsgleichung (C5.35) (siehe Seite 39).

π J	τ	EXP	SDI	PUFF	MIG
$\bar{0}$	0	10.94	12.29 23.35	12.92 24.20	13.67 25.40
$\bar{1}$	0	7.12 9.58 12.43	i 10.60 12.80 16.88 18.44 22.81	i 10.20 10.99 16.73 17.94 23.54	i 11.60 15.04 17.76 24.08 25.87
$\bar{2}$	0	8.88 12.52 13.97	11.87 16.60 18.11 18.82 22.68	11.95 15.65 17.66 19.18 22.92	12.52 17.60 19.08 19.94 23.35
$\bar{3}$	0	6.14 11.62	6.54 15.63 21.59	6.58 16.22 21.15	6.31 15.91 22.23
$\bar{4}$	0		18.34	17.74	19.28
$\bar{0}$	1	12.78	12.83 25.74	13.90 27.29	12.46 22.96
$\bar{1}$	1	13.10 17.30 ? 22.00 25.00	12.77 16.94 19.03 23.17 25.51	14.11 18.13 20.49 24.23 26.89	12.65 16.81 18.39 19.12 22.91
$\bar{2}$	1	12.96	12.52 17.44 18.18 20.74 23.41	13.29 18.45 19.41 21.18 24.07	11.59 16.67 17.72 18.60 22.73
$\bar{3}$	1	13.26	13.23 18.86 25.04	13.59 19.03 25.53	11.76 17.78 23.07
$\bar{4}$	1		19.79	19.54	17.77

Tab. III. Anregungsenergie von Zuständen neg. Parität in ^{16}O (In Mev)

Exp : Experimentelle Werte (Mav 67) , (Ajz 59).

SDI : Random-Phase-Rechnungen mit Surface-Delta-Interaction (Diese Arbeit)

PUFF: Random-Phase-Rechnung mit Puff-Potential (Hau 70)

MIG : Random-Phase-Rechnung mit Migdalscher Wechselwirkung (Vog 72)

J^π	E_{ST} (Mev)	E_{The} (Mev)	Γ_{The} (Mev)	E_{exp} (Mev)	Γ_{exp} (Mev)
$\bar{0}$	12.29 23.35 12.83 25.74	12.28 23.39 12.80 25.81	0.0026 0.0454 0.0462 0.2858	10.94 12.78	 0.038
$\bar{1}$	12.80 16.88 18.44 22.81 12.77 16.94 19.03 23.17 25.51	12.78 16.89 18.44 22.82 12.81 16.86 19.04 23.17 25.53	0.0012 0.2864 0.2420 0.1794 0.0009 0.1328 0.0856 0.9622 0.4375	7.12 9.58 12.43 13.10 17.30 ? 22.00 25.00	 0.650 0.088 0.130 0.260
$\bar{2}$	11.87 16.60 18.11 18.82 22.68 12.52 17.44 18.18 20.74 23.41	11.87 16.61 18.02 18.82 22.68 12.51 17.44 18.19 20.76 23.41	 0.1475 0.0806 0.0164 0.0608 0.0004 0.8900 0.2600 0.0748 0.1430	8.88 12.52 13.97 12.96	 0.0008 0.022 0.002
$\bar{3}$	6.54 15.63 21.59 13.23 18.86 25.04	6.35 15.63 21.57 13.22 18.86 25.11	0.2800 0.4200 0.0012 0.0415 0.0601	6.14 11.62 13.26	 1.200 0.021
$\bar{4}$	18.34 19.79	18.34 19.79	0.0044 0.0124		

Tab.IV. Bindungs- und Resonanz-Energien von ^{16}O ohne
Isospinkopplung.

E_{ST} : Strukturenergie

E_{The} : unter Einschluss des Kontinuums berechneten Resonanz-
Lagen; Γ_{The} ist die zugehörige volle Breite.

E_{exp} , Γ_{exp} sind experimentelle Werte (Ajz 59).

Integriert bis (Mev)	$E_{\bar{3}}$ (Mev)	$E_{\bar{3}}$ (Mev)	$\Gamma_{\bar{3}}$ (Mev)	$E_{\bar{3}}$ (Mev)	$\Gamma_{\bar{3}}$ (Mev)
62	6.3641	15.6320	0.2402	21.5741	0.3614
104	6.3551	15.6320	0.2575	21.5710	0.3733
158	6.3538	15.6320	0.2608	21.5710	0.3802
189	6.3532	15.6320	0.2680	21.5710	0.3900
223	6.3519	15.6320	0.2740	21.5710	0.3938
260	6.3511	15.6320	0.2797	21.5710	0.4198
408	6.3506	15.6320	0.2800	21.5710	0.4200

Tab.V. Energie und Breite des $\bar{3}$ -Zustandes in
Abhängigkeit der oberen Integrationsgrenze.

$T=1$ J^π	Strukturrechnung	Mit Kontinuum	Volle Breiten	Rechnungen von Pöp 70	
	E [Mev]	E [Mev]	Γ [Mev]	E [Mev]	Γ [Mev]
$\bar{0}$	-3.10	-3.139		-3.001	
	8.01	7.790	0.46	8.006	0.428
$\bar{1}$	-3.00	-3.017		-2.985	
	1.26	1.254	0.174	1.267	0.172
	3.09	3.060	0.028	3.115	0.028
	4.20	4.101	0.205	4.166	0.202
	7.80	7.787	0.344	7.821	0.346
$\bar{2}$	-3.71	-3.723		-3.659	
	1.27	1.265	0.181	1.281	0.184
	2.48	2.479	0.011	2.525	0.011
	3.58	3.561	0.018	3.573	0.016
	7.41	7.400	0.155	7.437	0.148
$\bar{3}$	-3.50	-3.517		-3.495	
	2.53	2.524	0.004	2.543	0.004
	7.91	7.896	0.305	7.913	0.306
$\bar{4}$	2.90	2.893		2.912	

Tab. VI. Bindungs- und Resonanz-Energien von ^{16}N .

Spalte 1 bis 3 geben die bei dieser Arbeit mit der SDI durchgeführten Rechnungen. Spalte 4 und 5 enthalten die von B. Pöpel und G. Schütte im Rahmen der Tamm-Dancoff-Approximation mit der SDI berechneten Werte.

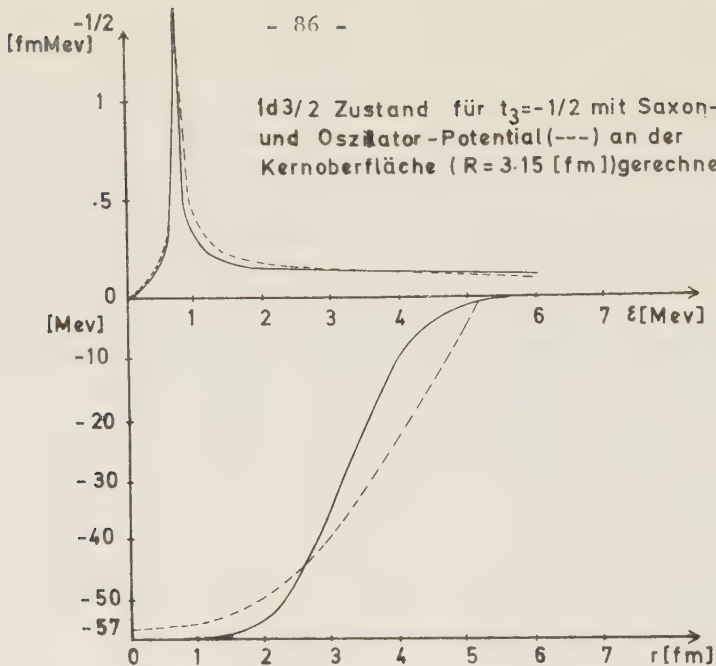


Abb.1 Vergleich zwischen Saxon-Woods(-) und Oszillator Potential(---).

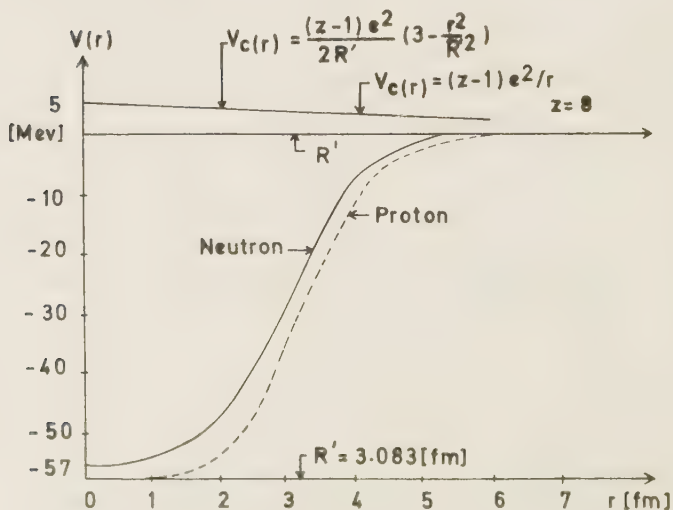


Abb.2 Einteilchenpotentiale für Protonen und Neutronen für ^{16}O .

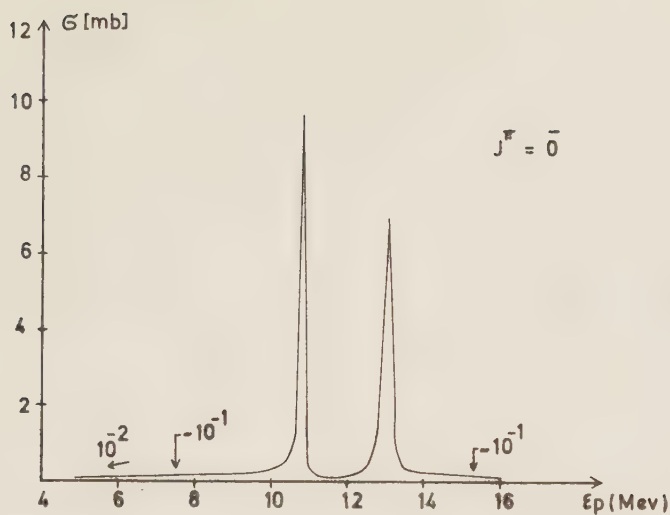


Abb. 3 Partieller Wirkungsquerschnitt für die
Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$.

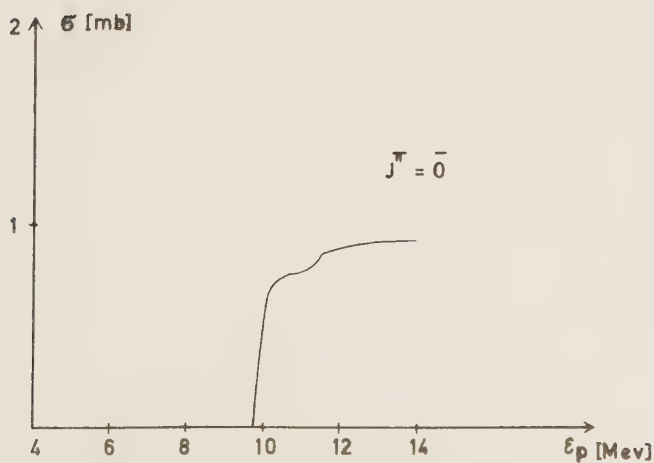


Abb. 4 Partieller Wirkungsquerschnitt für die
Reaktion $^{15}\text{N}(p,n')^{15}\text{O}$.

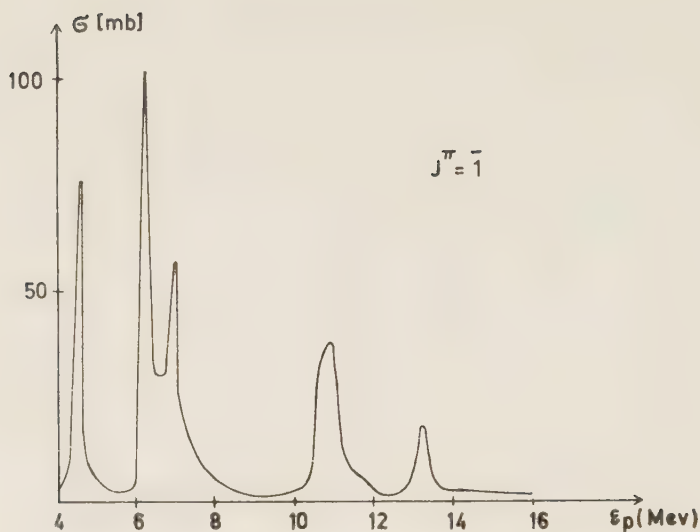


Abb. 5 Partieller Wirkungsquerschnitt für die Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p, n_0) ^{15}\text{O}$.

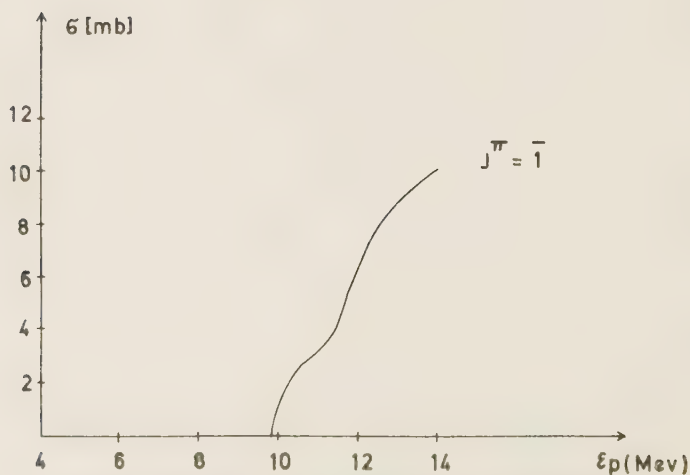


Abb. 6 Partieller Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{15}\text{N}(p, n') ^{15}\text{O}^*$.

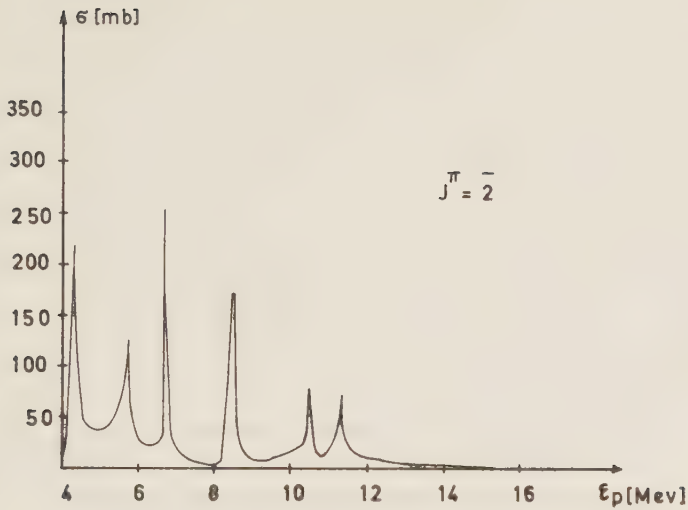


Abb.7 Partieller Wirkungsquerschnitt für die
Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p, n_0) ^{15}\text{O}$

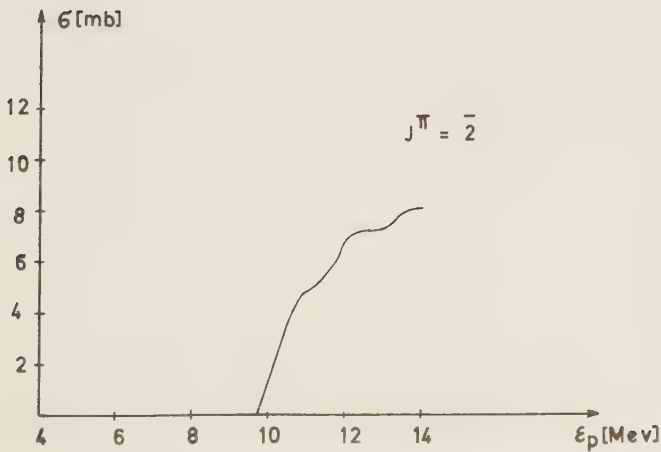


Abb.8 Partieller Wirkungsquerschnitt für die
Reaktion $^{15}\text{N}(p, n) ^{15}\text{O}^*$

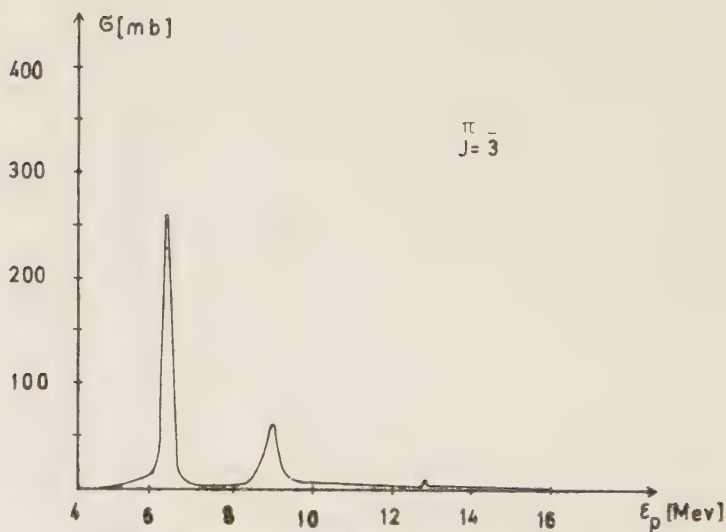


Abb. 9 Partieller Wirkungsquerschnitt für die Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$.

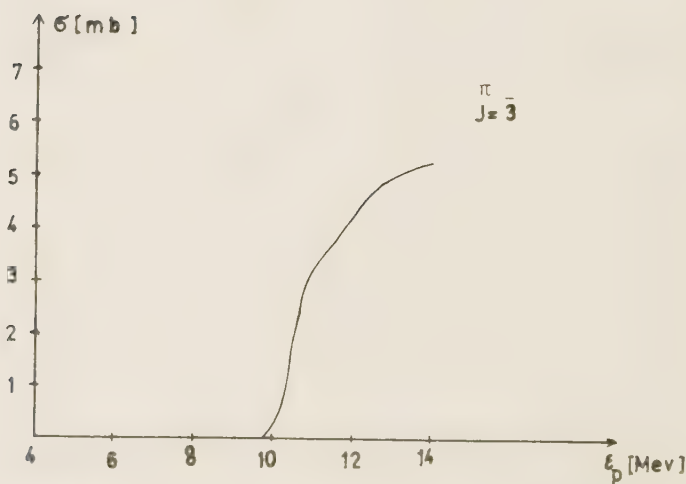


Abb. 10 Partieller Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $^{15}\text{N}(p,n')^{15}\text{O}^*$.

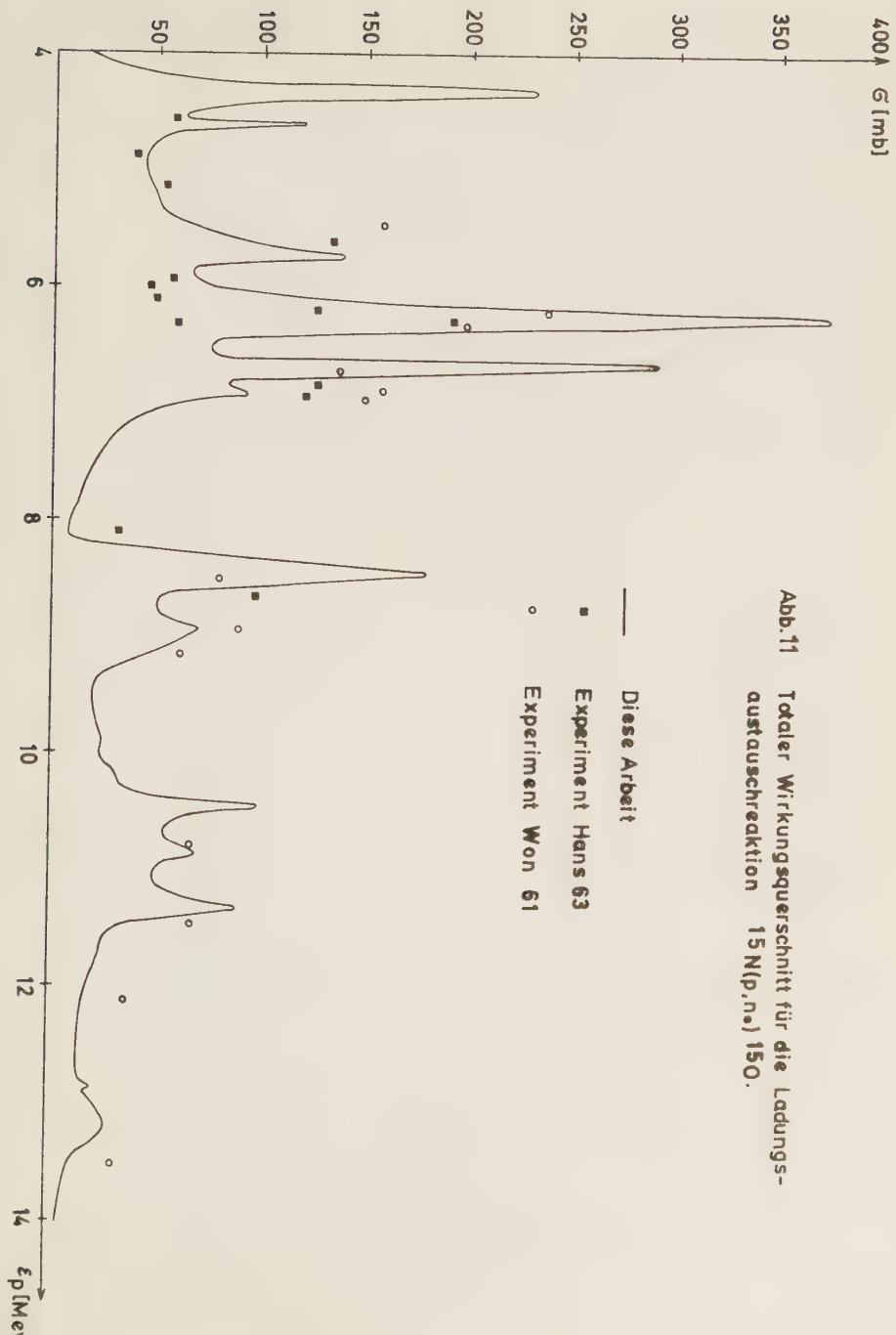
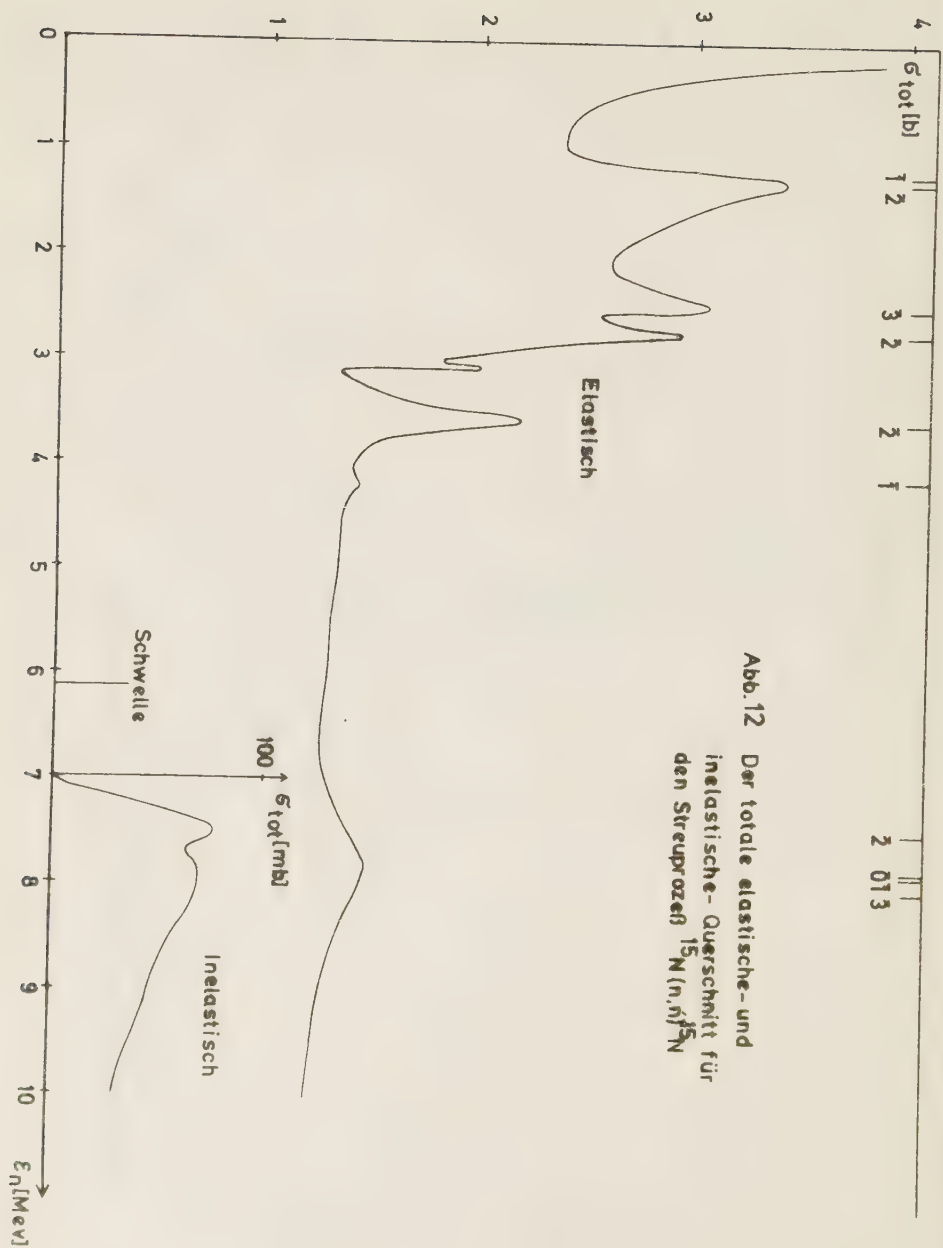


Abb. 11
Totaler Wirkungsquerschnitt für die Ladungsaustauschreaktion $^{15}\text{N}(p,n)^{15}\text{O}$.



Literaturverzeichnis

- Abr63 A.A.Abrikosov et al., Methods of Quantum Fieldtheory
in Statistical Physics (Prentice Hall, Englewood
Cliffs, N.Y. 1963).
- Ajz59 F.Ajzenberg-Selove and T.Lauritsen, Nucl.Phys.
11(1959)1.
- Bal66 V.V.Balashov et al., Sov.J.Nucl.Phys.2(1966)461.
- Ber67 W.Beres and W.Mac Donald, Nucl.Phys.A91(1967)529.
- Blo65 C.Bloch and V.Gillet, Phys.Lett.;6(1965)62.
- Blo66 C.Bloch, Proceedings of the E.Fermi Summer School,
Varenna, Course xxxvi, P.394(Acad.Press, N.Y. 1966).
- Bre65 W.Brenig and H.Wagner, Z.Phys.173(1963)484.
- Bre66 W.Brenig, Adv.Theo.Phys.1(1966)59.
- Coh68 B.Cohen, Phys.Lett.27B(1968)271.
- Dan66 M.Danos and W.Greiner, Phys.Rev.146(1966)708.
- Die68 K.Dietrich and K.Hara, Nucl.Phys.A111(1968)392.
- Dov71 C.Dover et al., Nucl.Phys.A166(1971)461.
- Ebe67 W.Ebenhöh et al., Z.Phys.202(1967)301.
- Edm64 A.Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik (B.I.,
Mannheim, 1964) P.93.
- Eis65 J.Eisenberg et al., Nucl.Phys.71(1965)273.
- Fan59 U.Fano and G.Racah, Irreducible Tensorial Sets (Acad.
Press, N.Y. 1965).
- Fes58 H.Feshbach, Ann.Phys.(N.Y.) 5(1958)357.
- Fes 62 H.Feshbach, Ann.Phys.(N.Y.) 19(1962)287.
- Fra61 Francis, the Computer J., Vol.4, No.3(1961).
- Fra62 Francis, the Computer J., Vol.4, No.4(1962).
- Gle67 N.Glendenning, Proceedings of the International
School of Physics E.Fermi, Course (1967) (Acad.
Press, N.Y.) and University of California, Lawrence
Radiation Laboratory Report UCRL- 17503.

- Gar66 L.Garside, Thesis, University of Maryland (1966).
- Gil66 V.Gillet, in Many-Body Description of Nuclear Structure and Reactions, Proceedings of the International School of Physics E.Fermi, Course (1966), edited by C.Block(Acad.Press Inc., N.Y., 1966).
- Glö67 W.Glöckle et al., Nucl.Phys.A90(1967)481.
- Gol64 M.Goldberger and K. Watson, "Collision Theory"(J.Wiley and Sons, N.Y., 1964).
- Gor28 W.Gordon, Z.Phys.48(1928)180.
- Gre65 I.Green and S.Moszkowski, Phys.Rev.139(1965)B790.
- Han68 J.Hanna and M.Nagarajan, Nucl.Phys.A113(1968)412.
- Hans63 L.Hansen and M.Stelts, Phys.Rev.132(1963)1123.
- Hau69 P.Haug and M.Weigel, Lettre Nuovo Cimento (1969)799.
- Hau70 P.Haug, Z.Phys.238(1970)289.
- Hüf68 J.Hüfner and R.Lemmer, Phys.Rev.175(1968)1394.
- Kad62 L.Kadanoff and G.Baym, Quantum Statistical Mechanics, Benjamin, N.Y., 1962.
- Kim73 Q.Ho-Kim, Phys.Rev.C8(1973)1574.
- Kre74 S.Krewald and J.Birkholz, Phys.Rev.Lett.33(1974)1386.
- Lan64 A.Lane, Nucl.Theory (Benjamin Inc., N.Y.,Amster. 1964).
- Lem64 R.Lemmer and C.Shakin, Ann.Phys.(N.Y.) 27(1964)13.
- Lem68 R.Lemmer and M.Veneroni, Phys.Rev. 170(1968)883.
- Let66 J.Letoureaux and J.Eisenberg, Nucl.Phys.85(1966)119.
- Lut60 Luttinger and Ward, Phys.Rev.118(1960)1417 ;Phys.Rev. 119(1960)1153 ; Phys.Rev.121(1960)942.
- Mül156 Müller-Verfahren, beschrieben in MTAC , 1956,PP 218-260.
- Mac64 W.Mac Donald, Nucl.Phys.54(1964)393;56(1964)636.

- Mac67 W. Mac Donald and A. Mekjian, Phys. Rev. 160(1967)730.
- Mav67 H. Mavromatis et al., Nucl. Phys. A90(1967)101.
- Mig64 A. Migdal and A. Larkin, Nucl. Phys. 51(1964)561.
- Mig66 A. Migdal, "Many-Body Description of Nuclear Structure and Reactions", Herg. C. Bloch, Acad. Press, N.Y. 1966.
- Mig67 A. Migdal, "Theorie of Finite Fermi-Systems and Applications to Atom Nuclei" (Interscience Publishers, N. Y. 1967).
- Mik63 H. Mikeska, Z. Phys. 177(1963)441.
- Mos65 S. Moszkowski and R. Arivien, Bull. Am. Phys. Soc. 10(1965) 1213.
- Mot28 N. Mott, Proc. Roy. Soc. A118(1928)1213.
- Mot33 I. Mott and H. Massey, "The Theory of Atomic Collisions", (Clarendon Press, Oxford, 1933).
- Pöp70 B. Pöpel and G. Schütte, Z. Phys. 231(1970)48.
- Pro68 Da Providencia and Shakin, Nucl. Phys. A108(1968)609.
- Ros61 L. Rosenfeld and J. Humblet, Nucl. Phys. 26(1961)529.
- Sch76 B. Schwesinger, Dissertation, Universität München, 1976.
- Tam65 T. Tamura, Rev. Mod. Phys. 37(1965)679.
- Tho61 D. Thouless, Nucl. Phys. 22(1961)78.
- Tho64 D. Thouless, Quantenmechanik der Vielteilchensysteme (B.I., Mannheim, 1964).
- Ung67 H. Unger, Nucl. Phys. A104(1967)564.
- Vog72 J. Vogeler, Dissertation, Universität München, 1972.
- Wal66 Walsh (Ed.), Numerical Analysis (A.P., London, 1966).
- Weig69 M. Weigel, Nucl. Phys. A137(1969)629.
- Weig70 M. Weigel, Z. Naturforschung 25a(1970)1562.

- Weig70 M.Weigel, Phys.Rev.C1(1970)1647.
- Weig71 M.Weigel and G.Wegmann, Fortschritte der Physik
19(1971)451.
- Wei66 H.Weidenmüller, Nucl.Phys.75(1966)189; H.Weidenmüller
and K.Dietrich, ibid. 83(1966)332.
- Wilk65 Wilkenson, The Algebraic Eigenvalue Problem (Claren-
don Press, Oxford, 1965).
- Wil71 F.Willres, Methoden der praktischen Analysis, W.
de Gruyter, Berlin, N.Y. 1971, P.378.
- Won61 C.Wong et al., Phys.Rev.123(1961)598.
- Yos36 F.Yost et al., Phys.Rev.49(1936)174.
- Zam65 Zamick, Phys.Lett.19(1965)580.

Herrn Prof. Dr. G. Süßmann danke ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. M. Weigel für sein beständiges Interesse an dieser Arbeit, seine fortwährende Bereitschaft zu eingehenden Diskussionen, denen ich viele Anregungen verdanke. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. M. Weigel für die Hilfe bei der sprachlichen Abfassung der Arbeit.

Herrn Dr. H. Gall schulde ich für viele Diskussionen und für seine Hilfsbereitschaft großen Dank.

Herrn Dr. B. Schwesinger danke ich für klärende Hinweise und die Überlassung von Programmen.

Meinem Freund und Landsmann Herrn Ing. (grad.) A. H. Alkozy danke ich für seine freundliche Unterstützung bei der Eintragung der Formeln in dieser Arbeit.

Diese Arbeit wurde durch Mittel des Bundesforschungsministeriums unterstützt.

Lebenslauf

Ich, Schah Mahmud Abdi, bin am 28.3.1943 in Kabul, Afghanistan geboren. Von 1950 bis 1963 besuchte ich die Nedjat Oberrealschule in Kabul, wo ich die Reifeprüfung ablegte. Im März 1964 bekam ich vom afghanischen Kultusministerium ein Stipendium für das Studium in die Bundesrepublik Deutschland. Im April und Mai desselben Jahres besuchte ich in Passau das Goethe-Institut. Anschließend kam ich nach München und immatrikulierte ich mich als Gasthörer im Münchner Studienkolleg, wo ich im Oktober die Prüfung zur Feststellung der Hochschulreife bestand. Im Wintersemester 1964/ 65 begann ich mit dem Physikstudium an der Universität München. Zu Beginn des Sommersemesters 1967 legte ich die Diplomvorprüfung ab. Im Juli 1970 schloß ich mein Studium durch eine Diplomarbeit in theoretischer Physik am Lehrstuhl Prof. Dr. G.Süßmann ab. Danach studierte ich Mathematik. Dieses Studium beendete ich im Jahre 1972 durch eine Diplomarbeit in numerischer Mathematik am Lehrstuhl Prof. Dr. G.Hämmerlin. Seit März 1974 arbeite ich an der Anfertigung der Dissertation bei Herrn Prof. Dr. M.Weigel (Lehrstuhl Prof. Dr. G.Süßmann).

